ACTA UNIVERSITATIS NICOLAI COPERNICI
EKONOMIA XXXIX – NAUKI HUMANISTYCZNO-SPOŁECZNE – ZESZYT 389 – TORUŃ 2009

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Katedra Matematyki Stosowanej

Marcin Bartkowiak

WYCENA OPCJI NA INDEKS WIG20 NA PODSTAWIE MODELI GARCH Z PRZEŁĄCZENIAMI REŻIMÓW

Zarys treści. W artykule podjęto próbę wyceny europejskiej opcji kupna na indeks WIG20 w oparciu o model GARCH z przełączeniami reżimów. Trudności w estymacji modelu ograniczają możliwości wykorzystania tego podejścia w praktyce, niemniej uzyskane wyniki pokazują, że prezentowana metoda wyceny może stanowić alternatywę dla klasycznego modelu Blacka–Scholesa–Mertona.

Słowa kluczowe: wycena opcji, modele przełącznikowe, modele GARCH

1. WSTĘP

Najczęściej wykorzystywany przez praktyków model wyceny zaproponowany przed niemal czterdziestu laty przez Blacka, Scholesa (1973) oraz Mertona (1973) jest krytykowany za liczne niedoskonałości. Najczęściej wskazuje się na nierealistyczne założenia odnośnie:

– normalności rozkładów zwrotów logarytmicznych (lognormalności cen),
– stałości w czasie współczynnika zmienności.

Liczne badania empiryczne (por. Cont, 2001; Doman, Doman, 2004) wskazują, że zwroty logarytmiczne charakteryzują się między innymi występowaniem grubych ogonów (leptokurtycznością) oraz skośnością, co wyklucza rozkład normalny. Również założenie o stałości w czasie zmienności nie da się obronić. Niezależnie od użytej miary zmienności typowe jest występowanie dużych wahań zmienności i zgrupowań zmienności, czyli występowania okresów podwyższonej zmienności, po których następują okresy zmienności obniżonej.

Jednym z kierunków badań uwzględniających powyższą krytykę jest wykorzystanie do wyceny opcji modeli zmienności. Zaletą tych modeli, oprócz oczywistej zdolności do wyjaśnienia i opisu kształtowania się zmienności, jest możliwość uwzględnienia rozkładu innego niż normalny. W prezentowanej pracy do wyceny opcji wykorzystano modele GARCH z przełączeniami reżimów.

2. MODEL MS-AR-GARCH

Po raz pierwszy połączenie modeli przełącznikowych typu Markowa z modelami autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej zaproponował Hamilton i Susmel (1994) wprowadzając model SWARCH. Następnie Gray (1996) rozszerzył model SWARCH o proces GARCH, uzyskując model MS-GARCH.

Rozważmy następujący model zwrotów logarytmicznych r_t instrumentu finansowego:

$$r_t = 100 \cdot (\ln S_t - \ln S_{t-1}) = 100 \cdot \ln \frac{S_t}{S_{t-1}},$$

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t,$$

gdzie S_t oznacza cenę instrumentu finansowego w chwili *t*, $\mu_t = E(r_t | \Phi_{t-1})$ jest średnią warunkową odpowiadającą informacji na temat procesów zwrotów dostępnej do momentu $t-1$, a z_t są niezależnymi zmiennymi losowymi z zerową średnią i jednostkową wariancją ($z_t \sim iid(0,1)$).

Niech reżim występujący w chwili t będzie określony przez nieobserwowalny proces s_t, który przyjmuje M wartości: $\{1, 2, \dots, M\}$. Proces s_t jest jednorodnym łańcuchem Markowa rzędu pierwszego, zatem bieżący reżim s_t zależy jedynie od reżimu poprzedniego s_{t-1}, co formalnie można zapisać następująco:

$$P(s_t = a_t | s_{t-1} = a_{t-1}, \dots, s_1 = a_1, s_0 = a_0) = P(s_t = a_t | s_{t-1} = a_{t-1}),$$

gdzie a_i przyjmuje wartość ze zbioru $\{1, 2, \dots, M\}$.

W modelu przełącznikowym typu Markowa MS-AR-GARCH (*Markov Switching* AR-GARCH) zakłada się, że:

$$\mu_t = \mu_t(\theta(s_t)),$$

$$\sigma_t = \sigma_t(\theta(s_t)),$$

gdzie $\theta(s_t)$ jest wektorem parametrów właściwych dla reżimu s_t.

Model MS-AR(*m*)-GARCH(*p,q*) ma następującą specyfikację:

$$r_t = a_0(s_t) + \sum_{i=1}^{m} a_i(s_t) r_{t-i} + \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega(s_t) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i(s_t) \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(s_t) \varepsilon_{t-i}^2.$$

Zatem warunkowa średnia w chwili t dla i-tego reżimu jest modelowana za pomocą procesu autoregresyjnego AR(*m*), a warunkowa wariancja w chwili t dla i-tego reżimu określona jest przez proces GARCH(*p,q*). Należy podkreślić, że niezależne zmienne losowe ε_t są opcjonalnie zależne od pewnych parametrów (liczby stopni swobody lub parametru skośności), które również mogą podlegać przełączeniu.

Estymacja modelu MS-AR-GARCH nastręcza trudności. Chcąc znaleźć wartość wariancji warunkowej σ_t^2, należy uwzględnić całą ścieżkę reżimów $s_t, s_{t-1}, \dots, s_1$. W literaturze pojawiły się dwa podejścia rozwiązania tego problemu.

Gray (1996) i Klassen (2002) wartości warunkowej wariancji opóźnionej w czasie, liczą jako wartość oczekiwaną z kolejnych wariancji dla wszystkich stanów.

Natomiast Davidson (2004) zaproponował transformację przekształcającą model GARCH(*p,q*) na proces autoregresyjny z nieskończona liczbą opóźnień ARCH(∞). Używając wielomianów operatorowych wynik transformacji można zapisać następująco:

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega(s_t)}{1-\beta_1(s_t)-\dots-\beta_p(s_t)} + \frac{\alpha(s_t)(L)}{\beta(s_t)(L)} = \delta_0(s_t) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(s_t)\varepsilon_{t-1}^2.$$

Zatem wariancja warunkowa σ_t^2 zależy bezpośrednio jedynie od aktualnego reżimu s_t, a parametry modelu są estymowane za pomocą metody największej wiarygodności. Funkcja wiarygodności, którą należy maksymalizować ma postać:

$$L = \sum_{t=1}^{T} \ln\left(\sum_{j=1}^{M} f(r_t|s_t = j, \Phi_{t-1}, \theta)P(s_t = j|\Phi_{t-1}, \theta)\right),$$

gdzie:

$$f(r_t|s_t = j, \Phi_{t-1}) = \frac{1}{\sigma_t(j)} g_j\left(\frac{r_t-\mu_t(j)}{\sigma_t(j)}\right),$$

$$\mu_t(j) = a_0(j) + a_1(j)r_{t-1} + \dots + a_m(j)r_{t-m},$$

$$\sigma_t^2(j) = \omega(j) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i(j)\sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(s_t)\sigma_{t-i}^2,$$

$P(s_t = j|\Phi_{t-1})$ – prawdopodobieństwo warunkowe przebywania procesu w stanie j w momencie t, przy danym zbiorze informacji Φ_{t-1},

g_j – funkcją gęstości innowacji odpowiadającej reżimowi j,

θ – wektor parametrów modelu (po wszystkich stanach).

Prawdopodobieństwa $P(s_t = j|\Phi_{t-1})$ są wyliczane za pomocą procedury rekurencyjnej:

$$P(s_t = j|\Phi_{t-1}) = \sum_{i=1}^{M} p_{ij}P(s_{t-1} = 1|\Phi_{t-1}),$$

$$P(s_t = j|\Phi_t) = \frac{f(r_t|s_t=j,\Phi_{t-1})P(s_t=j|\Phi_{t-1})}{\sum_{i=1}^{M} f(r_t|s_t=i,\Phi_{t-1})P(s_t=i|\Phi_{t-1})},$$

gdzie p_{ij} to prawdopodobieństwo warunkowe przejścia z reżimu i do j:

$$p_{ij} = P(s_t = j|s_{t-1} = i).$$

Jako wartości początkowe $P(s_t = j|\Phi_0)$ przyjmuje się prawdopodobieństwa bezwarunkowe $P(s_t = j)$, oznaczających prawdopodobieństwo znajdowania się procesu w poszczególnych reżimach.

Jeśli proces Markowa sterujący zmianą reżimów jest nieprzywiedlny i nieokresowy[1] to prawdopodobieństwa bezwarunkowe $P(s_t = i)$ przebywania procesu w i-tym reżimie, dla $i = 1,2$, wyznaczone jest w sposób jednoznaczny:

$$P(s_t = 1) = P(1) = \frac{1-p_{22}}{2-p_{11}-p_{22}},$$

$$P(s_t = 2) = P(2) = \frac{1-p_{11}}{2-p_{11}-p_{22}}.$$

Odwrotność prawdopodobieństwa $P(s_t = i)$, oznaczana symbolem $m(i)$ może być interpretowana jako średni czas powrotu procesu do reżimu i. Natomiast oczekiwany dalszy czas trwania systemu w reżimie i, wyraża się wzorem:

$$d(i) = \frac{1}{1-p_{ii}} = \frac{1}{p_{ij}}.$$

Oczekiwany dalszy czas trwania umożliwia ocenę średniego okres pozostawania w tym samym reżimie.

3. WYCENA OPCJI W OPARCIU O MODEL MS-AR-GARCH

Jako pierwszy użycie modelu klasy GARCH do wyceny instrumentów pochodnych zaproponował Duan (1995). W swojej pracy uogólnił tradycyjną koncepcję wyceny przy neutralnym podejściu do ryzyka. Podobnie jak w klasycznym podejściu wprowadza się miarę prawdopodobieństwa $\boldsymbol{P}$, dla procesu nieprzekształconego oraz arbitrażowej miary $\boldsymbol{Q}$, względem której zdyskontowany proces cen instrumentu finansowego jest martyngałem. Modyfikacja procesu stóp zwrotu, dokonywana jest w taki sposób, by w każdej chwili warunkowa wartość oczekiwana stopy zwrotu była równa stopie zwrotu wolnej od ryzyka. Parametr modyfikujący proces stóp zwrotu nie jest stały w czasie i podejście to nazwane zostało wyceną dla miary lokalnie wolnej od ryzyka (*Local Risk-Neutral Valuation Relationship* - LRNVR).

Powyższe warunki można zapisać następująco:

$$\mathrm{Var}^{\boldsymbol{P}}(r_t|\Phi_{t-1}) = \mathrm{Var}^{\boldsymbol{Q}}(r_t|\Phi_{t-1}),$$

$$E^{\boldsymbol{Q}}(r_t|\Phi_{t-1}) = r.$$

Jednym z kluczowych założeń dla omawianego podejścia jest warunkowa normalność stóp zwrotu. To założenie jest niezbędne, by zapewnić niezmienni-

[1] Nieprzywiedlność procesu Markowa oznacza, że wszystkie stany komunikują się ze sobą, tzn. stan *i*-ty jest osiągalny ze stanu *j*-tego dla każdego *i* oraz *j*. Nieokresowość procesu Markowa oznacza, że wszystkie stany są nieokresowe. Stan *i* ma okres *k*>1 jeżeli każdy powrót do stanu *i* następuje w ilości kroków będących wielokrotnością *k*: $k = NWD\{n: P(X_n = i|X_0 = i) > 0\}$ i $k > 0$.

czość rozkładu w czasie przekształcania procesu stóp zwrotu do martyngału. To ograniczenie można obejść przekształcając rozkłady gruboogonowe i skośne do rozkładu normalnego za pomocą odwrotności dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego (por. Duan, 1999).

Metoda LRNVR została wykorzystana do wyceny opcji w oparciu o model GARCH z przełączeniami (Duan i inni 2002). Niestety dla modeli MS-GARCH nie można wykorzystać innych rozkładów szoków niż normalny.

Niech warunkowa średnia μ_t oraz warunkowa wariancja σ_t^2 będą funkcjami mierzalnymi względem zbioru informacji Φ_{t-1}, wówczas ogólną postać modelu względem miary $\boldsymbol{P}$ można zapisać poniższymi równaniami:

$$\begin{cases} r_t = \mu_t + \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 = f(\sigma_s(j), z_t, -\infty < s < t, \theta), \\ z_t \sim N(0,1) \end{cases} \tag{1}$$

gdzie f to funkcja parametryczna opisująca wariancję warunkową, w której wektor θ jest parametrem, z_t jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie ze średnią zero i wariancją jeden, *r* to stopa wolna od ryzyka. Względem równoważnej miary martyngałowej $\boldsymbol{Q}$ model przyjmuje następującą postać:

$$\begin{cases} r_t = \mu_t + \sigma_t(\eta_t - \lambda_t) \\ \eta_t \sim N(0,1) \\ \sigma_t^2 = f(\sigma_s(j), z_t, -\infty < s < t, \theta). \\ z_t = \eta_t - \lambda_t \\ \lambda_t = \frac{\mu_t - r}{\sigma_t} \end{cases} \tag{2}$$

Rynek opisany modelem (1) jest niezupełny, istnieją bowiem dwa dodatkowe źródła niepewności – zmiana reżimu i zmienność wariancji warunkowej.

Oznacza to, że istnieją na rynku instrumenty pochodne nieosiągalne, czyli takie których wypłaty nie mogą być replikowane za pomocą strategii samofinansujących. Znalezienie równoważnej miary martyngałowej wymagało więc wykorzystania funkcji użyteczności inwestora i założenia, że rynkowa cena ryzyka związanego ze zmianą reżimu jest równa zero.

Z układu równań (2) wynika, że zdyskontowany proces cen jest martyngałem, można zatem zastosować arbitrażową metodę wyceny. Zatem cena europejskiej opcji kupna jest zdyskontowaną (względem stopy wolnej od ryzyka) warunkową wartość oczekiwaną wypłaty z opcji względem miary $\boldsymbol{Q}$:

$$c_t = exp[-r(T-t)]E^Q[max\{S_T - K, 0\}|\mathcal{F}_{t-1}]. \tag{3}$$

Nie jest możliwe wyznaczenie w sposób analityczny granicznych parametrów rozkładu cen instrumentu bazowego, zatem wycena oparta jest na procedurze *Monte Carlo* i przebiega według algorytmu:

1. estymacja parametrów modelu MS-AR-GARCH,

2. wygenerowanie próby niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym:

   $\{z_{t+1}^i, z_{t+2}^i, \dots, z_{t+\tau}^i\}_{i=1}^n$,

3. wygenerowanie próby niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym:

   $\{u_{t+1}^i, u_{t+2}^i, \dots, u_{t+\tau}^i\}_{i=1}^n$,

4. uzyskanie ścieżek reżimów, przy użyciu zmiennych z kroku 3 i prawdopodobieństw pozostania w poszczególnych reżimach:

   $\{s_{t+1}^i, s_{t+2}^i, \dots, s_{t+\tau}^i\}_{i=1}^n$,

5. uzyskanie ścieżek stóp zwrotu, poprzez wprowadzenie wartości uzyskanych w kroku 2 i 4 do modelu MS-AR-GARCH:

   $\{r_{t+1}^i, r_{t+2}^i, \dots, r_{t+\tau}^i\}_{i=1}^n$,

6. uzyskanie cen instrumentu bazowego w terminie wygaśnięcia w oparciu o ścieżki stopy zwrotu z kroku 5:

   $S_T^i = S_t \exp\left(\sum_{l=1}^{\tau} r_{t+l}^i\right)$,

7. wyznaczenie wypłaty z opcji kupna i wyliczenie wartości oczekiwanej ze wzoru (3):

   $c_t = \exp[-r(T-t)]\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\max\left(S_T^i - K, 0\right)\right]$.

4. WYNIKI EMPIRYCZNE

Wyceniono europejskie opcje kupna na indeks WIG20 o terminie wygaśnięcia 15.09.2006. Wyceny dokonano na koniec 21.07.2006. W symulacjach generowano po 10 000 trajektorii. Do estymacji modelu MS-AR-GARCH wykorzystano zwroty dzienne z okresu 2.01.1995–21.07.2006 co daje 2893 obserwacje. W tabeli 1 zebrane zostały podstawowe statystyki opisowe. Średni dzienny zwrot jest bliski zeru, ale dodatni. Odchylenie standardowe jest nieznacznie mniejsze od dwóch. Różnica między wartościami bezwzględnymi maksymalnej i minimalnej wartości zwrotu wskazują na nieznaczną asymetrię spadków i wzrostów. Szereg WIG20 charakteryzuje się niewielką ujemną skośnością (-0,1197) i znaczną kurtozą[2] (4,0263).

Podjęto próbę dopasowania do szeregu kilkunastu modeli MS-AR-GARCH różniących się rzędami opóźnień. Ostatecznie tylko dla jednego modelu – MS-

[2] W pracy mianem kurtozy określa się czwarty moment centralny pomniejszony o 3 (w literaturze określanej jako kurtoza nadwyżkowa – *excess kurtosis*).

GARCH(1,1), uzyskano parametry statystycznie istotne. Wyniki estymacji zamieszczono w tabeli 2.

Tabela 1. Statystyki opisowe szeregu WIG20 w okresie 3.10.1994–21.07.2006 (2893 obserwacje)

średnia	odch. standardowe	max.	min	skośność	kurtoza
0,0490	1,9000	13,7088	-14,1608	-0,1197	4,0263

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Oszacowanie parametrów modelu MS-GARCH(1,1) z rozkładem normalnym dla szeregu WIG20

$\omega(1)$	0,3157 (0,0398)	
$\omega(2)$	0,9678 (0,0614)	
$\alpha(1)$	0,0353 (0,0108)	
$\alpha(2)$	0,2635 (0,0734)	
$\beta(1)$	0,9598 (0,0091)	
$\beta(2)$	0,6991 (0,0817)	
Prawdopodobieństwa przejścia		
Reżim	1	2
1	0,9947	0,0053
2	0,0147	0,9853
$P(s_t = 1)$	0,7342	
$P(s_t = 2)$	0,2658	
$m(1)$	1,3621	
$m(2)$	3,76	
$d(1)$	187,62	
$d(2)$	67,9348	

Źródło: obliczenia własne w programie TSM.

Reżim pierwszy charakteryzuje niższa zmienność, natomiast reżim drugi wyższa. Należy podkreślić, że reżimy były bardzo stabilne – prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy poszczególnymi stanami są niskie. Prawdopodobieństwo znajdowania się w reżimie o niższej aktywności jest większe niż prawdopodobieństwo znajdowania się w reżimie o wyższej aktywności. Oczekiwane czasy trwania w reżimach są długie (188 i 68 dni), co oznacza, że na rynku występują długie okresy aktywności i uspokojenia.

Tabela 3 zawiera wyceny opcji kupna o różnych cenach wykonania. W porównaniu z rzeczywistymi wartościami opcji (uzyskanymi ex post) wycena z modelu Blacka–Scholesa–Mertona (BSM) jest zawyżona. Podobnie rzecz ma się z cenami uzyskanymi z wykorzystaniem modelu MS-GARCH, niemniej są one niższe niż uzyskane z modelu BSM.

Tabela 3. Wycena opcji opcji kupna na WIG20 z terminem wygaśnięcia 15.06.2006. Wycena na dzień 21.07.2006

money-ness	cena wy-konania	nazwa opcji	wartość w dniu wygaśnięcia	zdyskontowana wartość z dnia wygaśnięcia	BSM	cena ryn-kowa	MS-GARCH(1,1)
1,21	2500	OW20I6250	488	406,17	515	515	451,32
1,17	2600	OW20I6260	388	322,94	450	450	397,77
1,12	2700	OW20I6270	288	239,71	400	395	332,89
1,08	2800	OW20I6280	188	156,48	335	335	263,12
1,05	2900	OW20I6290	88	73,24	252	252	150,43
1,01	3000	OW20I6300	0	0	178	178	98,89
0,98	3100	OW20I6310	0	0	128	134	46,61
0,95	3200	OW20I6320	0	0	96	99	32,48
0,92	3300	OW20I6330	0	0	66	69	0
0,89	3400	OW20I6340	0	0	44	46,75	0
0,87	3500	OW20I6350	0	0	33	30,3	0

Źródło: obliczenia własne.

Z przeprowadzonej analizy, dla pewnego wycinka danych wynika, że modele MS-AR-GARCH mogą stanowić użyteczne narzędzi wyceny opcji, również na polskim rynku kapitałowym.

LITERATURA

Black F., Scholes M. (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, „Journal of Political Economy", 81, 637–659.

Cont R. (2001), *Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues*, „Quantitative Finance", 1, 223–236.

Davidson J. (2004), *Forecasting Markov-switching dynamic, conditionally heteroscedastic processes*, „Statistic and Probability Letters", 68, 137–147.

Doman M., Doman R. (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, AE w Poznaniu, Poznań.

Duan J.-C. (1995), *The GARCH Option Pricing Model*, „Mathematical Finance", 5, 13–32.

Duan J.-C. (1999), Conditionally fat-tailed distributions and the volatility smile in options, Working Paper, Department of Finance, Hong Kong University of Science and Technology

Duan J.C., Popova I., Ritchken P. (2002), *Option pricing under regime switching*, „Quantitative Finance", 2, 116–132.

Gray S. (1996), *Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process*, „Journal of Financial Economics", 42, 27–62.

Hamilton J.D., Susmel R. (1994), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity and Changes in Regime*, „Journal of Econometrics", 64, 307–333

Klassen F. (2002), *Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-Switching GARCH*, „Empirical Economics", 27, 363–394

Merton R.C. (1973), *Theory of rational option pricing*, „Bell Journal of Economics and Managment Science", 4, 141–183.

APPLICATION OF THE MARKOV SWITCHING GARCH MODELS TO THE WIG20 OPTION PRICING

A b s t r a c t. The Markov Switching models are an interesting alternative to modelling the volatility of financial assets, as they make it possible to capture the periods of high and low activity typical for financial markets.. In the article the author tried to use the Markov Switching AR-GARCH models to the WIG20.

K e y w o r d s: option pricing, Markov Switching models, GARCH models.