

*Michał Bernard Pietrzak*

## WYKORZYSTANIE ODLEGŁOŚCI EKONOMICZNEJ W PRZESTRZENNEJ ANALIZIE STOPY BEZROBOCIA DLA POLSKI

**Słowa kluczowe:** *ekonometria przestrzenna, stopa bezrobocia, przestrzenna macierz wag, model SAR, odległość ekonomiczna*

**Abstrakt:** W artykule zaprezentowano wykorzystanie przestrzennej macierzy wag opartej na odległości ekonomicznej w analizie przestrzennej stopy bezrobocia dla Polski. Przestrzenna macierz wag wyraża potencjalne interakcje przestrzenne między badanymi obszarami i stanowi podstawę stosowanych narzędzi ekonometrii przestrzennej. Podczas ustalania sąsiedztwa wykorzystywane są takie kryteria, jak kryterium wspólnej granicy, kryterium odległości czy kryterium  $k$  najbliższych sąsiadów. Potencjalna siła oddziaływanie jest natomiast ustalana za pomocą standaryzacji macierzy wierszami do jedności lub za pomocą odległości opartych na własnościach fizycznych obszarów. Słabością standaryzacji macierzy jest przyjęcie tej samej siły oddziaływania dla wszystkich obszarów. Naturalnym wydaje się zróżnicowanie siły oddziaływania w zależności od wybranych obszarów, co wynikać powinno z podobieństwa oraz różnic obszarów w zakresie kształtowania się badanego zjawiska oraz jego determinant. Wykorzystanie odległości opartej na własnościach fizycznych obszarów pozwala na ujęcie zróżnicowanej siły oddziaływania sąsiadujących obszarów, co pozwala na większą realność prowadzonych analiz. Niestety własności fizyczne nie są determinantami zjawisk ekonomicznych, których dotyczy analiza przestrzenna, co oznacza, że najczęściej nie mają one bezpośredniego związku z badanym zjawiskiem. Przedstawione w artykule wykorzystanie odległości ekonomicznej do budowy macierzy wag stanowi alternatywą

określania siły oddziaływania dla ekonomicznych procesów przestrzennych wobec odległości opartej na charakterystykach fizycznych badanych obszarów oraz wobec propozycji standaryzacji wierszami do jedności.

## **APPLICATION OF ECONOMIC DISTANCE FOR THE PURPOSES OF A SPATIAL ANALYSIS OF THE UNEMPLOYMENT RATE FOR POLAND**

**Keywords:** *spatial econometrics, unemployment rate, spatial weight matrix, SAR model, economic distance*

**Abstract:** The article presents the problem of the application of the spatial weight matrix based on economic distance in spatial analysis of the unemployment rate. The spatial weight matrix expresses potential spatial interactions between the researched areas and forms a basis for the instruments applied in spatial econometrics. While identifying the neighbourhood, the following criteria are used: a common border, distance, and the  $k$  number of the nearest neighbours. The potential force of impact is identified by means of the standardisation of the matrix by rows to unity, or by means of the distance based on the physical properties of the areas. The disadvantage of the matrix standardisation is the fact of accepting the same force of impact for all the areas. It seems natural is the differentiation of the force of the impact dependent on the selected areas which should result from the differences and similarities of the areas in the scope of the researched phenomenon and its determinants. The use of the distance based on physical properties of the areas allows considering the diverse force of impact of neighbouring areas, which, in turn, allows to obtain a more precise outcome of analyses. Unfortunately, physical properties do not constitute the determinants of economic phenomena covered by a spatial analysis which means that they are not related directly to the scrutinised phenomenon. The application of economic distance for building spatial weight matrix shown in the present paper constitutes a way of determining of the force of impact for the economic spatial processes that is alternative to the distance based on physical properties of the researched areas and to the proposal of the standardisation by rows to unity.

### **WPROWADZENIE**

W artykule poruszone zostało istotne zagadnienie ekonometrii przestrzennej, jakim jest definicja oraz wykorzystanie przestrzennej macierzy

wag. Kwestia ta poruszana była zarówno w pionierskich pracach dotyczących ekonometrii przestrzennej Cliff, Ord (1973, 1981), Bivand (1981), Klaassen, Paelinck, Wagenaar (1982), Klaassen, Pealinck (1983), Anselin (1988), Zeliaś (1991), jak i w pracach współczesnych Arbia (2006), Kopczevska (2005), Szulc (2007), Bivand, Pebesma, Gómez-Rubio (2008), LeSage, Pace (2009), Suhecki (2010). Konstrukcja macierzy sąsiedztwa wymaga ustalenia sąsiedztwa między obszarami, a następnie w ramach przyjętego sąsiedztwa, wyrażenia siły oddziaływania pomiędzy sąsiadami. Proces definiowania macierzy można wyrazić za pomocą dwuetapowej procedury budowy macierzy sąsiedztwa (por. Pietrzak 2010). W etapie pierwszym ustalane jest sąsiedztwo między obszarami. W etapie drugim określana jest potencjalna siła wzajemnego oddziaływania, najczęściej w ramach standaryzacji wierszami do jedności lub wykorzystania odległości opartej na własnościach fizycznych obszarów. W procedurze standaryzacji zakłada się taką samą siłę oddziaływania pomiędzy wybranym obszarem a obszarami sąsiadującymi. Wykorzystanie odległości opartej na własnościach fizycznych pozwala na zróżnicowanie siły oddziaływania obszarów sąsiadujących, jednak może doprowadzić do błędnego rozłożenia masy siły, w przypadku, gdy własności fizyczne nie mają zbyt wiele wspólnego z analizowanym przestrzennym procesem ekonomicznym. Argumenty te wskazują na potrzebę wykorzystania odległości ekonomicznej, która pozwalałaby na różnicowanie siły oddziaływania przestrzennego i byłaby w bezpośredniej relacji do zjawiska ekonomicznego, które jest badane. Ponieważ informacja dotycząca podobieństwa obszarów ze względu na badane zjawisko jest kluczowa dla prowadzonych analiz ekonomicznych, to jej pominięcie znacznie zubaża prowadzone analizy. Uwzględnienie podobieństwa poprzez wykorzystanie odległości ekonomicznej powinno pozwolić na ustalenie realnej siły oddziaływania między sąsiadującymi obszarami.

Celem artykułu jest przedstawienie możliwości zastosowania macierzy sąsiedztwa opartej na odległości ekonomicznej w prowadzonych analizach przestrzennych. Cel ten zrealizowany zostanie w ramach analizy stopy bezrobocia w Polsce w 2008 roku. Obliczenia odległości ekonomicznej bazować będą na wartościach stopy bezrobocia, a w modelu przestrzennym wykorzystane zostaną determinanty w postaci inwestycji oraz liczby podmiotów gospodarczych przypadających na mieszkańca.

## **POJĘCIE ODLEGŁOŚCI EKONOMICZNEJ**

Zgodnie z postawionym celem artykułu utworzona zostanie najpierw macierz sąsiedztwa oparta na odległości ekonomicznej. W pierwszym eta-

pie zbudowana zostanie binarna macierz sąsiedztwa pierwszego rzędu. Sąsiedztwo ustalone zostanie według kryterium wspólnej granicy. W etapie drugim, utworzona zostanie finalna macierz sąsiedztwa. Do wyrażenia potencjalnej siły oddziaływania wykorzystana zostanie odległość ekonomiczna. Odległość ta określona zostanie jako miara podobieństwa sąsiadujących obszarów pod względem wartości rozpatrywanego procesu ekonomicznego  $Y$  oraz jego  $n$  determinant. W większości przypadków wykorzystanie wartości badanego procesu oraz jego  $n$  determinant powinno pozwolić na poprawne uchwycenie podobieństwa ekonomicznego obszarów, na podstawie którego wyznacza się następnie siłę interakcji przestrzennych. Możliwe jest również wzięcie pod uwagę średnich determinant, szczególnie takich które charakteryzują się dużą zmiennością w czasie. Przy tak przyjętej definicji dowolnie wybrany obszar powinien charakteryzować się zmienną odległością ekonomiczną w zależności od wybranego sąsiada<sup>1</sup>. Zgodnie z powyższym, odległość ekonomiczną zapisać można jako

$$d_{ij} = \begin{cases} |y_i - y_j|^{\delta_1} + \frac{1}{k_1 + 1} \sum_{z=0}^{k_1} |x_{1i,t-z} - x_{1j,t-z}|^{\delta_2} + \dots \\ \dots + \frac{1}{k_2 + 1} \sum_{z=0}^{k_2} |x_{2i,t-z} - x_{2j,t-z}|^{\delta_3} + \frac{1}{k_n + 1} \sum_{z=0}^{k_n} |x_{ni,t-z} - x_{nj,t-z}|^{\delta_{n+1}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (1)$$

gdzie  $Y$  jest procesem objaśnianym,  $X_i$  są to procesy objaśniające<sup>2</sup>, stałe  $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$  oznaczają wielkość opóźnienia po czasie dla przyjętych procesów,  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n+1}$  są to stałe normalizujące, przyjmujące wartości większe od zera<sup>3</sup>.

W związku z określoną odległością ekonomiczną, binarną macierz sąsiedztwa można przekształcić zgodnie ze wzorem

---

<sup>1</sup> W większości prowadzonych analiz wykorzystywana jest najczęściej standaryzowana macierz sąsiedztwa pierwszego rzędu, oparta na sąsiedztwie wspólnej granicy. Nie przekreśla to jednak wyników prowadzonych analiz, a wykorzystanie takiej macierzy wynika z prostoty jej konstrukcji oraz łatwości wykorzystania w modelach przestrzennych oraz interpretacji.

<sup>2</sup> Wszystkie wykorzystane procesy muszą zostać poddane operacji normalizacji.

<sup>3</sup> Opis dotyczący wzorów obowiązujący będzie dla wszystkich wzorów w tekście. W razie potrzeby opis zostanie rozszerzony.

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_{ij}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (2)$$

gdzie na podstawie uzyskanej macierzy, w wyniku standaryzacji wierszy do jedności, uzyskiwana jest macierz sąsiedztwa oparta na odległości ekonomicznej.

Określona wzorem (1) odległość ekonomiczna wykorzystana zostanie do przestrzennej analizy stopy bezrobocia w Polsce w 2008 roku. Bezrobocie, jako ważne oraz negatywne zjawisko społeczne, charakteryzuje się znacznym zróżnicowaniem przestrzennym. Analiza układu przestrzennego stopy bezrobocia wskazuje na tworzenie się skupisk, klastrów niskiego lub wysokiego bezrobocia, co świadczy o silnych zależnościach przestrzennych tego zjawiska. Dla uproszczenia rozważań pod uwagę wzięte zostaną dwie determinanty, inwestycje oraz liczba podmiotów gospodarczych przypadające na mieszkańców. W ramach prowadzonej analizy przestrzennej należy ustalić potencjalne interakcje przestrzenne między obszarami, w wyniku czego otrzymywana jest przestrzenna macierz wag  $W$ . W celu uproszczenia prowadzonych rozważań, do obliczeń odległości ekonomicznej wykorzystano jedynie wartości stopy bezrobocia z 2008 roku<sup>4</sup>. Zgodnie z przyjętym założeniem, odległość ekonomiczna między powiatami policzona zostanie ze wzoru

$$d_{ij} = \begin{cases} |y_i - y_j|^\delta, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (3)$$

Na podstawie tak wyznaczonej odległości ekonomicznej zbudowana została macierz sąsiedztwa  $W$ . Tak powstała macierz wag  $W$  jest wynikiem standaryzacji wierszami do jedności macierzy, której elementy wyznaczone zostały zgodnie ze wzorem (2). Pierwszą rzeczą, którą należy rozpatrzyć jest pokazanie różnicy pomiędzy standaryzowaną macierzą wag pierwszego rzędu a macierzą opartą na odległości ekonomicznej. W tabeli 1 przedsta-

---

<sup>4</sup> Pojawia się tutaj zagrożenie wystąpienia tych samych wartości zjawiska dla różnych obszarów, co spowoduje, że odległość ekonomiczna będzie wynosić zero. Sugerowane jest wtedy przyjęcie wartości równej najmniejszej możliwej jednostki, jaką może przyjąć miara analizowanego zjawiska. W przypadku stopy bezrobocia najmniejsza wartość jednostki wynosi 0,1.

wiono wagi dla obydwu macierzy<sup>5</sup>. Wagi oraz wartości stopy bezrobocia przedstawiono dla wszystkich powiatów, których sąsiadami były Toruń lub Bydgoszcz. Wagi pokazano w takim układzie, ponieważ w artykule analizowany będzie wpływ oddziaływania Torunia oraz Bydgoszczy na sąsiadów wywołany zmianą poziomu inwestycji w tych powiatach. W kolumnie drugiej i trzeciej tabeli 1 znajdują się wagi wynikające ze standaryzowanej macierzy sąsiedztwa pierwszego rzędu. W macierzy tej zakładana jest taka sama potencjalna siła oddziaływania dla wszystkich sąsiadów, co przekłada się na równe wartości wag dla dowolnie wybranego wiersza. Analiza kolumn wskazuje na istotny mankament związany z liczbą sąsiadów, gdzie wagi oznaczające potencjalny wpływ ze strony sąsiadów przyjmują wyższe wartości dla obszarów o mniejszej liczbie sąsiadów. Na przykład wpływ zmian w Toruniu będzie dużo wyższy w powiecie aleksandrowskim, niż w powiecie bydgoskim, a wynika to wyłącznie z faktu, iż powiat bydgoski ma więcej sąsiadów. Dodatkowo ustalone wagi nie mają żadnego powiązania z kształtowaniem się stopy bezrobocia w powiatach. Najbardziej podobne do Torunia, pod względem stopy bezrobocia oraz związanego z poziomem bezrobocia rozwoju społeczno-gospodarczego, są Bydgoszcz i powiat bydgoski. Tymczasem wagi dla wymienionych obszarów przyjmują wartości najmniejsze, co wynika z największej liczby sąsiadów. Dopiero wykorzystanie odległości ekonomicznej pozwala na zróżnicowanie potencjalnej siły oddziaływania między obszarami, a co ważniejsze na ustalenie wag, których wartości korespondują bezpośrednio z poziomem analizowanego zjawiska ekonomicznego, czyli stopą bezrobocia w powiatach.

W kolumnie czwartej i piątej znajdują się wagi oparte na odległości ekonomicznej dla wartości  $\delta=1$ , gdzie łatwo zauważyć w przypadku Torunia dwie największe wagi dla Bydgoszczy oraz powiatu bydgoskiego. Wagi dla pozostałych obszarów nie przekraczają wartości 0,05, co oznacza, że wpływ zmian w Toruniu na te obszary jest niski w porównaniu z dwoma, wymienionymi obszarami. Podobnie kształtują się wagi dla Bydgoszczy. Ważnym odnotowania jest fakt, że wagi z kolumny czwartej i piątej korespondują z poziomem stopy bezrobocia. Największe wagi przypisane zostały obszarom, gdzie różnice w stopie bezrobocia są najmniejsze, co rozumiane jest jednocześnie jako wysoki stopień podobieństwa obszarów w ramach analizowanego zjawiska ekonomicznego.

---

<sup>5</sup> Obliczenia wykonywane są dla 379 powiatów. Jednak ze względu na czytelność wyników pokazywane będą wszystkie lub wybrane powiaty województwa kujawsko-pomorskiego.

**Tabela 1. Wagi dla standaryzowanej macierzy sąsiedztwa pierwszego rzędu oraz macierzy opartej na odległości ekonomicznej przy  $\delta = 1$** 

Powiat	Macierz standaryzowana		Macierz oparta na odległości ekonomicznej		Stopa bezrobocia
	Toruń	Bydgoszcz	Toruń	Bydgoszcz	
Aleksandrowski	0,167	0	0,048	0	16,6
Bydgoski	0,1	0,1	0,165	0,131	12,2
Chełmiński	0,143	0,143	0,041	0,038	20,8
Golubsko-dobrzyński	0,167	0	0,008	0	19,4
Inowrocławski	0,111	0,111	0,012	0,011	21,0
Lipnowski	0,111	0	0,023	0	24,4
Nakielski	0	0,167	0	0,021	21,8
Sępoleński	0	0,125	0	0,02	22,7
Świecki	0	0,111	0	0,029	17,3
Toruński	0,111	0,111	0,031	0,028	17,2
Tucholski	0	0,167	0	0,021	18,0
Wąbrzeski	0,167	0	0,013	0	19,6
Żniński	0	0,143	0	0,02	22,4
Bydgoszcz	0,1	0	0,542	0	7,3
Toruń	0	0,111	0	0,529	8,3

Zródło: opracowanie własne.

Ważnym problemem w przypadku wykorzystania odległości ekonomicznej do budowy przestrzennej macierzy wag jest ustalenie właściwej wartości parametru  $\delta$ . Wraz ze zwiększaniem wartości parametru  $\delta$  rosną różnice między wagami obszarów o dużym stopniu podobieństwa a wagami obszarów o niskim stopniu podobieństwa. Zagadnienie to należy odnieść do problemu wyboru między egzogenicznym a endogenicznym charakterem macierzy sąsiedztwa. Przyjęcie założenia, że macierz sąsiedztwa jest endogeniczna oznacza estymację parametru  $\delta$  wraz z pozostałymi parametrami modelu przestrzennego. Natomiast założenie egzogenicznej macierzy sąsiedztwa wymusza przyjęcie przez badacza a priori wartości parametru  $\delta$ . W tabeli 2 znajdują się wagi dla standaryzowanej macierzy sąsiedztwa pierwszego rzędu oraz dla macierzy opartej na odległości ekonomicznej przy  $\delta = 0,5$ . Wnioski wynikające z tabeli 2 są podobne do wniosków wynikających z tabeli 1. Porównanie tych tabel pozwala jednak

na stwierdzenie różnicy między macierzami opartymi na odległości ekonomicznej przy różnych wartościach parametru  $\delta$ . W przypadku wartości parametru  $\delta=0,5$  obszary najbardziej podobne do Torunia lub Bydgoszczy mają niższe wartości wag, a obszary najmniej podobne mają wyższe wartości wag. Wybór wartości parametru  $\delta$  należy do badacza i powinien zależeć od tego, w jakim stopniu podobieństwo między regionami warunkuje ich oddziaływanie między sobą.

**Tabela 2. Wagi dla standaryzowanej macierzy sąsiedztwa pierwszego rzędu oraz macierzy opartej na odległości ekonomicznej przy  $\delta = 0,5$**

Powiat	Macierz standaryzowana		Macierz oparta na odległości ekonomicznej		Stopa bezrobocia
	Toruń	Bydgoszcz	Toruń	Bydgoszcz	
Aleksandrowski	0,167	0	0,104	0	16,6
Bydgoski	0,1	0,1	0,130	0,116	12,2
Chełmiński	0,143	0,143	0,083	0,080	20,8
Golubsko-dobrzyński	0,167	0	0,047	0	19,4
Inowrocławski	0,111	0,111	0,044	0,043	21,0
Lipnowski	0,111	0	0,058	0	24,4
Nakielski	0	0,167	0	0,071	21,8
Sępoleński	0	0,125	0	0,057	22,7
Świecki	0	0,111	0	0,062	17,3
Toruński	0,111	0,111	0,065	0,062	17,2
Tucholski	0	0,167	0	0,067	18,0
Wąbrzeski	0,167	0	0,059	0	19,6
Żniński	0	0,143	0	0,061	22,4
Bydgoszcz	0,1	0	0,270	0	7,3
Toruń	0	0,111	0	0,278	8,3

Źródło: opracowanie własne.

## MODEL DLA STOPY BEZROBOCIA W POLSCE

Na podstawie przyjętych, trzech macierzy sąsiedztwa przeprowadzona została analiza przestrzenna stopy bezrobocia w Polsce, w 2008 roku mierzonej w układzie powiatów. Do opisu zmienności badanego procesu eko-



nomicznego wykorzystano przestrzenny model SAR (Spatial Autoregressive Model), gdzie za potencjalne zmienne objaśniające przyjęto wartość inwestycji oraz liczbę podmiotów gospodarczych przypadających na mieszkańca. Przestrzenny model SAR stanowi uogólnienie modelu regresji liniowej poprzez uwzględnienie w modelu opóźnień przestrzennych zmiennej objaśnianej (por. Anselin 1988, LeSage, Pace 2009), co zapisujemy za pomocą wzoru

$$Y = \rho WY + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 x + \beta_4 y + \varepsilon \quad (4)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I) \quad (5)$$

gdzie  $Y$  jest wektorem zmiennej objaśnianej,  $W$  jest ustaloną z góry macierzą sąsiedztwa,  $\rho$  jest parametrem autoregresji przestrzennej,  $\beta_1, \dots, \beta_4$  są to parametry strukturalne,  $X_1$  stanowi poziom inwestycji przypadający na liczbę mieszkańców,  $X_2$  stanowi liczbę podmiotów gospodarczych na liczbę mieszkańców,  $x, y$  są to koordynaty geograficzne pozwalające na wyznaczenie trendu przestrzennego, natomiast proces  $\varepsilon$  jest szumem przestrzennym.

Na podstawie danych dokonano estymacji trzech przestrzennych modeli SAR, w zależności od przyjętej macierzy wag. W modelu 1 wykorzystano standaryzowaną macierz sąsiedztwa pierwszego rzędu, natomiast w modelu 2 oraz modelu 3 wykorzystano macierze sąsiedztwa oparte na odległości ekonomicznej, odpowiednio dla wartości parametru  $\delta = 1$  oraz  $\delta = 0,5$ .

Uzyskane wyniki przedstawione zostały w tabeli 3, gdzie wszystkie modele posiadają prawidłowe własności statystyczne, jak i poprawną interpretację ekonomiczną. Zarówno dla wielkości inwestycji, jak i liczby podmiotów gospodarczych otrzymano ujemną ocenę parametru, co oznacza istotny wpływ zwiększenia poziomu zmiennych objaśniających na spadek stopy bezrobocia. Wykorzystanie macierzy sąsiedztwa opartej na odległości ekonomicznej powinno zapewnić lepsze dopasowanie modelu do danych empirycznych, co widoczne jest w wartościach logarytmu funkcji wiarygodności oraz wartościach współczynnika determinacji. Lepsze dopasowanie do danych empirycznych wynika głównie z pełniejszego opisu autozależności przestrzennych stopy bezrobocia, o czym świadczy wzrost parametru autoregresji z poziomu 0,62 do wartości 0,74.

**Tabela 3. Wyniki estymacji modeli przestrzennych<sup>6</sup>**

Model 1			Model 3		
Parametry	Oceny	p-value	Parametry	Oceny	p-value
$P$	0,62	0	$P$	0,741	0
$\beta_1$	-0,54	0	$\beta_1$	-0,37	0
$\beta_2$	-0,49	0	$\beta_2$	-0,51	0
$\beta_3$	0,44	0	$\beta_3$	0,3	0
$\beta_4$	-0,31	0,02	$\beta_4$	-0,25	0,03
Współczynnik determinacji	0,54		Współczynnik determinacji	0,67	
Logarytm funkcji wiarygodności	-		Logarytm funkcji wiarygodności	-	
		1071,87			-1018,84
Własności reszt			Własności reszt		
Statystyka $I$ Morana	-0,003		Statystyka $I$ Morana	-0,066	
p-value	0,508		p-value	0,97	
Model 2					
Parametry	Oceny	p-value			
$P$	0,747	0			
$\beta_1$	-0,3	0			
$\beta_2$	-0,5	0			
$\beta_3$	0,27	0			
$\beta_4$	-0,22	0,03			
Współczynnik determinacji	0,74				
Logarytm funkcji wiarygodności	-				
		-987,37			
Własności reszt					
Statystyka $I$ Morana	-0,041				
p-value	0,87				

Źródło: opracowanie własne.

Lepsze dopasowanie do danych empirycznych wynikające z uwzględnienia autozależności przestrzennych spowodowało jednak zmianę ocen

<sup>6</sup> Jednostką procesu inwestycji jest wielkość inwestycji w tysiącach na mieszkańca, a jednostką podmiotów gospodarczych jest liczba stu podmiotów przypadających na dziesięć tysięcy mieszkańców.

parametrów zmiennych objaśniających. W przypadku liczby podmiotów gospodarczych nastąpił spadek z -0,54 do -0,5, a w przypadku wartości inwestycji spadek siły oddziaływania był znacznie większy. Ocena parametru przy inwestycja spadła z poziomu -0,49 do -0,3. Kwestia interpretacji otrzymanych ocen parametrów zmiennych objaśniających poruszona zostanie w kolejnym rozdziale. Ocena parametru autoregresji na poziomie 0,63 dla modelu opartego na macierzy sąsiedztwa pierwszego rzędu pozwala stwierdzić, że zjawisko bezrobocia charakteryzuje się bardzo silnymi mechanizmami, które przeciwdziałają zmianie struktury przestrzennej bezrobocia. Ocena parametrów autoregresji dla modeli z macierzą sąsiedztwa opartą na odległości ekonomicznej pozwala na wniosek o jeszcze silniejszych mechanizmach przestrzennych.

## INTERPRETACJA SIŁY ODDZIAŁYWANIA DETERMINANT BEZROBOCIA

W przypadku wykorzystywania przestrzennych modeli ekonometrycznych pojawia się problem interpretacji otrzymanych ocen parametrów (por. Abreu, de Groot, Florax 2004, LeSage, Pace 2009). Występująca w modelu przestrzennym SAR autoregresja wymusza inną interpretację parametrów, niż ma to miejsce w przypadku modelu regresji liniowej. Przedstawiając macierz zmiennych objaśniających za pomocą sumy pojedynczych wektorów otrzymuje się następującą postać modelu.

$$Y = V(W)X\beta + V(W)\varepsilon, \quad V(W) = (I - \rho W)^{-1} \quad (6)$$

$$Y = V(W)\beta_1 X_1 + \dots + V(W)\beta_k X_k + V(W)\varepsilon \quad (7)$$

$$S_r(W) = V(W)\beta_r \quad (8)$$

$$Y = \sum_{r=1}^k S_r(W)x_r + V(W)\varepsilon \quad (9)$$

Zgodnie ze wzorem (9), dla każdej zmiennej objaśniającej  $X_r$  otrzymywana jest macierz  $S_r(W)$ , której poszczególne elementy określają wpływ zmiennej  $X_r$  na zmienną objaśnianą w zależności od wybranych regionów w przestrzeni. Macierz  $S_r(W)$  przedstawić można w następującej postaci.

$$S_r(W) = \begin{bmatrix} S_r(w)_{11} & \cdot & \cdot & S_r(w)_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ S_r(w)_{n1} & \cdot & \cdot & S_r(w)_{nn} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\frac{\partial E(Y_i)}{\partial x_{ir}} = S_r(W)_{ij}$$

W modelu regresji liniowej ocena parametru  $\beta_r$  określa średnią zmianę zmiennej objaśnianej wywołaną zmianą zmiennej objaśniającej  $X_r$ . Natomiast w modelu przestrzennym istnieje  $n^2$  interpretacji szczegółowych<sup>7</sup> oddziaływania zmiennej  $X_r$ , w zależności od wybranych lokalizacji w przestrzeni. Wybrana wartość  $S_r(W)_{ij}$  interpretowana jest jako średni wpływ zmiany zmiennej  $X_r$ , jaka nastąpiła w regionie  $i$ , na wartości zmiennej objaśnianej w regionie  $j$ .

Zgodnie z opisaną powyżej kwestią interpretacji parametrów dla modeli przestrzennych przedstawione zostaną interpretacje szczegółowe otrzymanych ocen parametrów zmiennych objaśniających oraz porównanie otrzymanych wyników dla wszystkich, trzech modeli. Dla uproszczenia rozważań rozpatrzona zostanie zmiana tylko jednej ze zmiennych objaśniających (poziomu inwestycji) w dwóch lokalizacjach jednocześnie, Toruniu oraz Bydgoszczy. Wyniki oddziaływania tych zmian, jako interpretacje szczegółowe parametrów przedstawione zostaną jedynie dla powiatów województwa kujawsko-pomorskiego. Wynika to z faktu, że dla powiatów z pozostałych województw, wpływ zmiany w Toruniu oraz Bydgoszczy jest na tyle niski, że może zostać pominięty.

W tabeli 4 przedstawiono siłę oddziaływania między obszarami wynikającą z przyjęcia standaryzowanej macierzy sąsiedztwa pierwszego rzędu oraz macierzy opartej na odległości ekonomicznej przy  $\delta=1$ . Zaprezentowane wyniki dotyczą potencjalnej siły oddziaływania Torunia oraz Byd-

---

<sup>7</sup> Interpretacja ocen parametrów modelu zwykłej regresji liniowej traktowana jest jako interpretacja ogólna, ponieważ jest taka sama dla wszystkich obszarów. W przypadku modeli przestrzennych występuje interpretacja szczegółowa, zmieniająca się w zależności od wybranych dwóch obszarów. Należy podkreślić, że istnieje możliwość utworzenia miar średniego oddziaływania dla modeli przestrzennych, które pozwolą na interpretację ogólną.

goszcy na powiaty z województwa kujawsko-pomorskiego. Potencjalna siła oddziaływania między wybranymi obszarami określona jest za pomocą odpowiednich elementów macierzy  $V(W)$ . Potencjalna siła oddziaływania wynika z przyjętej macierzy wag, co z kolei wynika z ustalonego sąsiedztwa między obszarami.

**Tabela 4. Siła oddziaływania wynikająca z przyjęcia określonej macierzy sąsiedztwa, przy zmianie poziomu inwestycji w Toruniu oraz Bydgoszczy**

Powiat	Macierz standaryzowana		Macierz oparta na odległości ekonomicznej		Stopa bezrobocia
	Toruń	Bydgoszcz	Toruń	Bydgoszcz	
Aleksandrowski	0,162	0,045	0,103	0,066	16,6
Brodnicki	0,041	0,013	0,018	0,013	15,0
Bydgoski	0,111	0,145	0,237	0,222	12,2
Chełmiński	0,152	0,150	0,098	0,090	20,8
Golubsko-dobrzyński	0,169	0,036	0,035	0,021	19,4
Grudziądzki	0,035	0,033	0,031	0,030	24,1
Inowrocławski	0,121	0,121	0,044	0,042	21,0
Lipnowski	0,121	0,026	0,046	0,024	24,4
Mogileński	0,024	0,040	0,028	0,029	20,6
Nakielski	0,031	0,164	0,036	0,060	21,8
Radziejowski	0,043	0,024	0,031	0,028	20,6
Rypiński	0,046	0,010	0,023	0,013	19,6
Sępoleński	0,024	0,131	0,028	0,048	22,7
Świecki	0,034	0,118	0,045	0,068	17,3
Toruński	0,153	0,124	0,102	0,083	17,2
Tucholski	0,031	0,162	0,035	0,056	18,0
Wąbrzeski	0,171	0,050	0,047	0,030	19,6
Włocławski	0,033	0,009	0,027	0,016	23,7
Żniński	0,037	0,144	0,037	0,056	22,4
Bydgoszcz	0,111	1,087	0,543	1,250	7,3
Grudziądz	0,022	0,047	0,027	0,033	21,5
Toruń	1,088	0,124	1,257	0,530	8,3
Włocławek	0,048	0,011	0,027	0,015	16,8

Źródło: opracowanie własne.

Analiza kolumny drugiej i trzeciej tabeli 4, których wartości dotyczą standaryzowanej macierzy sąsiedztwa, pozwala na stwierdzenie braku związku pomiędzy potencjalną siłą oddziaływania między obszarami a wielkościami ich stóp bezrobocia. Wartości kolumn czwartej i piątej przedstawiają wartości potencjalnej siły oddziaływania dotyczące macierzy opartej na odległości ekonomicznej. Największe wartości zarówno dla Torunia, jak i dla Bydgoszczy otrzymują powiaty o zbliżonej stopie bezrobocia. Natomiast siła oddziaływania Torunia oraz Bydgoszczy na powiaty o znacznie odstających wartościach stopy bezrobocia jest mniejsza od 0,105.

Natomiast w tabeli 5 zaprezentowano siłę oddziaływania między obszarami wynikającą z przyjęcia standaryzowanej macierzy sąsiedztwa pierwszego rzędu oraz macierzy opartej na odległości ekonomicznej przy  $\delta=0,5$ . Przedstawione wyniki dotyczą również potencjalnej siły oddziaływania Torunia oraz Bydgoszczy na wybrane powiaty. Obniżenie wartości parametru do poziomu 0,5 przekłada się na zmniejszenie różnic siły oddziaływania między obszarami o dużym i niskim podobieństwie. W przypadku wartości parametru  $\delta=1$  wielkość siły oddziaływania Torunia na Bydgoszcz wynosiła 0,543, Torunia na powiat bydgoski 0,237, Torunia na powiat aleksandrowski 0,103 oraz Torunia na powiat chełmiński 0,098. W przypadku, gdy parametr wynosi  $\delta=0,5$ , wielkość siły oddziaływania ulega zmianie i potencjalne oddziaływanie Torunia na Bydgoszcz wynosi 0,304, Torunia na powiat bydgoski 0,199, Torunia na powiat aleksandrowski 0,173 oraz Torunia na powiat chełmiński 0,178.

Najważniejszym atutem modelu jest jego aspekt praktyczny w postaci możliwości ustalenia siły oddziaływania zmiennych objaśniających na zmienną objaśnianą. Wartości tej siły zawarte są w macierzy  $S_r(W)$ , której elementy interpretować można jako siłę oddziaływania zmiany zmiennej objaśniającej  $X_i$  obszaru  $i$  na zmianę stopy bezrobocia w obszarze  $j$ . Tabela 6 przedstawia interpretacje szczegółowe zmian stopy bezrobocia, które spowodowane zostały wpływem zmiany poziomu inwestycji w Toruniu oraz Bydgoszczy. Przedstawione wyniki dotyczą dwóch modeli, pierwszy bazujący na standaryzowanej macierzy sąsiedztwa pierwszego rzędu, a drugi na macierzy opartej na odległości ekonomicznej przy  $\delta=1$ . Jak zostało pokazane w tabeli 4, potencjalna siła oddziaływania dla powiatów podobnych pod względem stopy bezrobocia do Torunia lub Bydgoszczy jest dużo większa przy wykorzystaniu macierzy sąsiedztwa opartej na odległości ekonomicznej w porównaniu z macierzą sąsiedztwa pierwszego rzędu. Jednak do wyznaczenia siły oddziaływania ze strony zmiennej objaśniającej należy przemnożyć potencjalną siłę oddziaływania przez parametr

strukturalny stojący przy tej zmiennej. Ocena parametru dla modelu 1 wynosi  $-0,492$ , natomiast ocena parametru dla modelu 2 wynosi  $-0,305$ . Oznacza to, że początkowa większa potencjalna siła oddziaływania ulega pomniejszeniu. Pomimo to zachowana zostaje poszukiwana zależność, w postaci większej siły oddziaływania na obszary podobne do obszaru, w którym nastąpiła zmiana.

**Tabela 5. Siła oddziaływania wynikająca z przyjęcia określonej macierzy sąsiedztwa, przy zmianie poziomu inwestycji w Toruniu oraz Bydgoszczy**

Powiat	Macierz standaryzowana		Macierz oparta na odległości ekonomicznej		Stopa bezrobocia
	Toruń	Bydgoszcz	Toruń	Bydgoszcz	
Aleksandrowski	0,162	0,045	0,178	0,091	16,6
Brodnicki	0,041	0,013	0,053	0,030	15,0
Bydgoski	0,111	0,145	0,199	0,211	12,2
Chełmiński	0,152	0,150	0,173	0,161	20,8
Golubsko-dobrzyński	0,169	0,036	0,122	0,055	19,4
Grudziądzki	0,035	0,033	0,059	0,057	24,1
Inowrocławski	0,121	0,121	0,110	0,108	21,0
Lipnowski	0,121	0,026	0,110	0,046	24,4
Mogileński	0,024	0,040	0,053	0,064	20,6
Nakielski	0,031	0,164	0,061	0,144	21,8
Radziejowski	0,043	0,024	0,068	0,054	20,6
Rypiński	0,046	0,010	0,064	0,029	19,6
Sępoleński	0,024	0,131	0,046	0,113	22,7
Świecki	0,034	0,118	0,065	0,126	17,3
Toruński	0,153	0,124	0,176	0,139	17,2
Tucholski	0,031	0,162	0,056	0,130	18
Wąbrzeski	0,171	0,050	0,144	0,076	19,6
Włocławski	0,033	0,009	0,054	0,027	23,7
Żniński	0,037	0,144	0,067	0,131	22,4
Bydgoszcz	0,111	1,087	0,304	1,147	7,3
Grudziądz	0,022	0,047	0,048	0,067	21,5
Toruń	1,088	0,124	1,153	0,313	8,3
Włocławek	0,048	0,011	0,063	0,028	16,8

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 6. Siła oddziaływania wynikająca z wybranych modeli, przy zmianie poziomu inwestycji w Toruniu oraz Bydgoszczy**

Powiat	Macierz standaryzowana		Macierz oparta na odległości ekonomicznej		Stopa bezrobocia
	Toruń	Bydgoszcz	Toruń	Bydgoszcz	
Aleksandrowski	-0,080	-0,022	-0,031	-0,020	16,6
Brodnicki	-0,020	-0,006	-0,006	-0,004	15,0
Bydgoski	-0,055	-0,072	-0,073	-0,068	12,2
Chełmiński	-0,075	-0,074	-0,030	-0,028	20,8
Golubsko-dobrzyński	-0,083	-0,018	-0,011	-0,006	19,4
Grudziądzki	-0,017	-0,016	-0,009	-0,009	24,1
Inowrocławski	-0,060	-0,060	-0,013	-0,013	21,0
Lipnowski	-0,060	-0,013	-0,014	-0,007	24,4
Mogileński	-0,012	-0,019	-0,008	-0,009	20,6
Nakielski	-0,015	-0,081	-0,011	-0,018	21,8
Radziejowski	-0,021	-0,012	-0,010	-0,009	20,6
Rypiński	-0,023	-0,005	-0,007	-0,004	19,6
Sepoleński	-0,012	-0,065	-0,009	-0,015	22,7
Świecki	-0,017	-0,058	-0,014	-0,021	17,3
Toruński	-0,075	-0,061	-0,031	-0,025	17,2
Tucholski	-0,015	-0,080	-0,011	-0,017	18,0
Wąbrzeski	-0,084	-0,025	-0,014	-0,009	19,6
Włocławski	-0,016	-0,005	-0,008	-0,005	23,7
Żniński	-0,018	-0,071	-0,011	-0,017	22,4
Bydgoszcz	-0,055	-0,535	-0,166	-0,382	7,3
Grudziądz	-0,011	-0,023	-0,008	-0,010	21,5
Toruń	-0,536	-0,061	-0,384	-0,162	8,3
Włocławek	-0,024	-0,005	-0,008	-0,005	16,8

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 7 przedstawiono wartości siły oddziaływania wynikające z modelu 1 oraz z modelu 3. Do budowy modelu 3 wykorzystano macierz sąsiedztwa opartą na odległości ekonomicznej przy  $\delta = 0,5$ . Podobnie jak w przypadku modelu 2, model 3 charakteryzuje się znacznie większą potencjalną siłą oddziaływania w porównaniu z modelem 1 opartym na ma-



cierzy sąsiedztwa pierwszego rzędu. Model 3 posiada również niższą wartość oceny parametru dla inwestycji w porównaniu z modelem 1, jednak wyższą, niż to miało miejsce dla modelu 2. Model 3 charakteryzuje również zależność, gdzie siła oddziaływania jest większa dla obszarów podobnych do obszaru, w którym nastąpiła zmiana.

**Tabela 7. Siła oddziaływania wynikająca z wybranych modeli, przy zmianie poziomu inwestycji w Toruniu oraz Bydgoszczy**

Powiat	Macierz standaryzowana		Macierz oparta na odległości ekonomicznej		Stopa bezrobocia
	Toruń	Bydgoszcz	Toruń	Bydgoszcz	
Aleksandrowski	-0,080	-0,022	-0,067	-0,034	16,6
Brodnicki	-0,020	-0,006	-0,020	-0,011	15,0
Bydgoski	-0,055	-0,072	-0,075	-0,079	12,2
Chełmiński	-0,075	-0,074	-0,065	-0,060	20,8
Golubsko-dobrzyński	-0,083	-0,018	-0,046	-0,021	19,4
Grudziądzki	-0,017	-0,016	-0,022	-0,021	24,1
Inowrocławski	-0,060	-0,060	-0,041	-0,041	21,0
Lipnowski	-0,060	-0,013	-0,041	-0,017	24,4
Mogileński	-0,012	-0,019	-0,020	-0,024	20,6
Nakielski	-0,015	-0,081	-0,023	-0,054	21,8
Radziejowski	-0,021	-0,012	-0,025	-0,020	20,6
Rypiński	-0,023	-0,005	-0,024	-0,011	19,6
Sępoleński	-0,012	-0,065	-0,017	-0,042	22,7
Świecki	-0,017	-0,058	-0,024	-0,047	17,3
Toruński	-0,075	-0,061	-0,066	-0,052	17,2
Tucholski	-0,015	-0,080	-0,021	-0,049	18,0
Wąbrzeski	-0,084	-0,025	-0,054	-0,028	19,6
Włocławski	-0,016	-0,005	-0,020	-0,010	23,7
Żniński	-0,018	-0,071	-0,025	-0,049	22,4
Bydgoszcz	-0,055	-0,535	-0,114	-0,430	7,3
Grudziądz	-0,011	-0,023	-0,018	-0,025	21,5
Toruń	-0,536	-0,061	-0,432	-0,117	8,3
Włocławek	-0,024	-0,005	-0,023	-0,010	16,8

Źródło: opracowanie własne.

**Tablica 8. Łączna siła oddziaływania wynikająca z modelu, przy założeniu różnych macierzy wag**

Powiat	Macierz standaryzowana	Macierz oparta na odległości ekonomicznej		Stopa bezrobocia
		$\delta = 0,5$	$\delta = 1$	
Aleksandrowski	-0,102	-0,101	-0,052	16,6
Brodnicki	-0,026	-0,031	-0,009	15,0
Bydgoski	-0,126	-0,154	-0,140	12,2
Chełmiński	-0,149	-0,125	-0,057	20,8
Golubsko-dobrzyński	-0,101	-0,066	-0,017	19,4
Grudziądzki	-0,033	-0,044	-0,019	24,1
Inowrocławski	-0,119	-0,082	-0,026	21,0
Lipnowski	-0,072	-0,058	-0,021	24,4
Mogileński	-0,031	-0,044	-0,017	20,6
Nakielski	-0,096	-0,077	-0,029	21,8
Radziejowski	-0,033	-0,045	-0,018	20,6
Rypiński	-0,028	-0,035	-0,011	19,6
Sępoleński	-0,076	-0,060	-0,023	22,7
Świecki	-0,075	-0,072	-0,035	17,3
Toruński	-0,136	-0,118	-0,056	17,2
Tucholski	-0,095	-0,070	-0,028	18,0
Wąbrzeski	-0,109	-0,082	-0,023	19,6
Włocławski	-0,021	-0,030	-0,013	23,7
Żniński	-0,089	-0,074	-0,029	22,4
Bydgoszcz	-0,590	-0,543	-0,548	7,3
Grudziądz	-0,034	-0,043	-0,018	21,5
Toruń	-0,597	-0,549	-0,546	8,3
Włocławek	-0,029	-0,034	-0,013	16,8
Suma oddziaływania	-2,768	-2,538	-1,751	-

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 8 przedstawiono łączną siłę oddziaływania na stopę bezrobocia w wybranych powiatach w wyniku zmian poziomu inwestycji zarówno w Toruniu, jak i w Bydgoszczy. W ostatnim wierszu zapisana została suma siły oddziaływania dla wszystkich wymienionych powiatów. Największe

oddziaływanie wynika z modelu opartego na macierzy sąsiedztwa pierwszego rzędu. Najmniejsze oddziaływanie policzone zostało dla modelu 2. W przypadku modeli, gdzie wykorzystywana jest macierz oparta na odległości ekonomicznej, przyjęcie wysokiej wartości parametru  $\delta$  oznacza przyjęcie przez badacza założenia o istnieniu silnych mechanizmów powodujących autozależności przestrzenne w rozpatrywanym zjawisku. Przyjęcie parametru na niskim poziomie oznacza z kolei, iż mechanizmy kreujące autozależności przestrzenne zjawiska nie są zbyt silne. Tłumaczy to różnice w łącznej sumie siły oddziaływania, dla modelu 3 wynoszącej -2,538 oraz modelu 2 równej -1,750. Dla modelu 2 zakładane są silniejsze mechanizmy związane z kształtowaniem się bezrobocia. Przy założeniu, że największą potencjalną siłą oddziaływania mają obszary najbardziej podobne do siebie, założenie silnych mechanizmów nie oznacza sumarycznie dużych zmian w całym regionie. Zachodzi przeciwna sytuacja. Silne mechanizmy kreujące autozależności przestrzenne stopy bezrobocia powodują, że istotne zmiany stopy bezrobocia następują jedynie w obszarach najbardziej podobnych do obszaru, w którym nastąpiła zmiana określonej zmiennej objaśniającej. Oczywiście do badacza powinien należeć wybór odpowiedniej wartości parametru  $\delta$  oraz uzasadnienie tego wyboru.

## ZAKOŃCZENIE

W artykule przedstawiono zagadnienie wykorzystania przestrzennej macierzy wag opartej na odległości ekonomicznej w ramach przeprowadzonej analizy przestrzennej. Poszczególne wartości tej macierzy wyrażają potencjalne interakcje przestrzenne między badanymi obszarami. Wykorzystanie odległości ekonomicznej do budowy przestrzennej macierzy wag stanowi alternatywę określania siły oddziaływania dla ekonomicznych procesów przestrzennych wobec odległości opartej na charakterystykach fizycznych badanych obszarów oraz wobec propozycji standaryzacji wierszami do jedności.

Przeprowadzona analiza przestrzenna dotyczyła stopy bezrobocia w Polsce w 2008 roku w podziale na powiaty. W ramach analizy zbudowano i dokonano estymacji modeli wykorzystujących różne macierze wag, standaryzowaną macierz pierwszego rzędu oraz dwie macierze oparte na odległości ekonomicznej. Modele, gdzie wykorzystane zostały macierze oparte na odległości ekonomicznej wykazały właściwą interpretację oddziaływania determinant stopy bezrobocia w odniesieniu do wartości badanego zjawiska. Natomiast model wykorzystujący standaryzowaną macierz sąsiedztwa pierwszego rzędu wykazał brak korespondencji pomiędzy wartościami analizowanej stopy bezrobocia a wartościami jej determinant.

Oznacza to, że wykorzystanie w modelach ekonometrycznych przestrzennych macierzy wag opartych na odległości ekonomicznej zwiększa poprawność interpretacyjną oddziaływania zmiennych objaśniających, a co za tym idzie znacznie poprawia jakość prowadzonych analiz.

## LITERATURA

- Abreu M., de Groot H. L. F., Florax R. J. G. M. (2004), *Space and Growth: A Survey of Empirical Evidence and Methods*, Tinbergen Institute Working Paper No. Ti 04-129/3
- Anselin L. (1988), *Spatial Econometrics: Method and Models*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Anselin L., Florax R. J. G. M., Rey, S. J. (2004), *Advances in Spatial Econometrics. Methodology, Tools and Applications*, Springer-Verlag, Berlin.
- Arbia G. (2006), *Spatial Econometrics*, Springer-Verlag GmbH.
- Bivand R. (1981), *Modelowanie geograficznych układów czasoprzestrzennych*, PWN, Warszawa-Poznań
- Bivand, R., Pebesma, E. J., Gómez-Rubio, V. (2008), *Applied Spatial Data Analyses with R*, Springer, New York.
- Clif A., Ord J. (1973), *Apaital Autocorrelation*, Pion, London.
- Clif A., Ord J. (1981), *Apaital Processes, Models and Applications*, Pion, London.
- Klaassen J. H. P., Paelinck L. H., Wagenaar S. (1982), *Systemy przestrzenne*, PWN, Warszawa
- Klaassen J. H. P., Paelinck L. H. (1983), *Ekonometria przestrzenna*, PWN, Warszawa
- Kopczewska K. (2006), *Ekonometria i statystyka przestrzenna*, CeDeWu, Warszawa.
- LeSage J. P., Pace R. K. (red) (2004), *Advances in Econometrics: Spatial and Spatiotemporal Econometrics*, Elsevier, Amsterdam.
- LeSage J.P., Pace R. K. (2009), *Introduction to Spatial Econometrics*, CRC Press.
- Schabenberger, O., Gotway, C. A. (2005), *Statistical Methods for Spatial Data Analysis*, Texts in Statistical Science, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London.
- Suchecky B. (2010), *Ekonometria przestrzenna. Metody i modele analizy danych przestrzennych*, Wydawnictwo C.H.Beck, Warszawa
- Szulc E. (2007), *Ekonometryczna analiza wielowymiarowych procesów gospodarczych*, Wydawnictwo UMK, Toruń 2007.
- Zeliaś A. (red) (1991), *Ekonometria przestrzenna*, PWE, Warszawa.