

Tomasz Chruściński

Wykorzystywanie wielowymiarowych modeli klasy GARCH do badania wzajemnego wpływu rynków finansowych na świecie

Słowa kluczowe: *giełdy papierów wartościowych, metody taksonometryczne, wielowymiarowe modele GARCH*

Abstrakt: Wśród wielu metod analizowania wzajemnego wpływu rynków finansowych na świecie bardzo popularnym podejściem staje się metoda warunkowej macierzy wariancji-kowariancji zakładająca, że stopy zwrotu danego instrumentu finansowego pochodzą z pewnego rozkładu wielowymiarowego i zależne są od zmian kursowych innego instrumentu. W pracy dokonano próby wyznaczenia optymalnego modelu opisującego warunkową strukturę zależności w zakresie zmian zachodzących w jednej gospodarce na sytuację ekonomiczną w innej. Do tego celu posłużono się danymi charakteryzującymi giełdy różnych państw, które zostały wybrane do badania za pomocą metod taksonometrycznych. Na podstawie przyjętych szeregów czasowych zbudowano kilka wielowymiarowych modeli klasy GARCH (*Multivariate GARCH*) w kontekście praktycznego ich wykorzystania do oceny powiązań ekonomicznych gospodarek.

Wprowadzenie

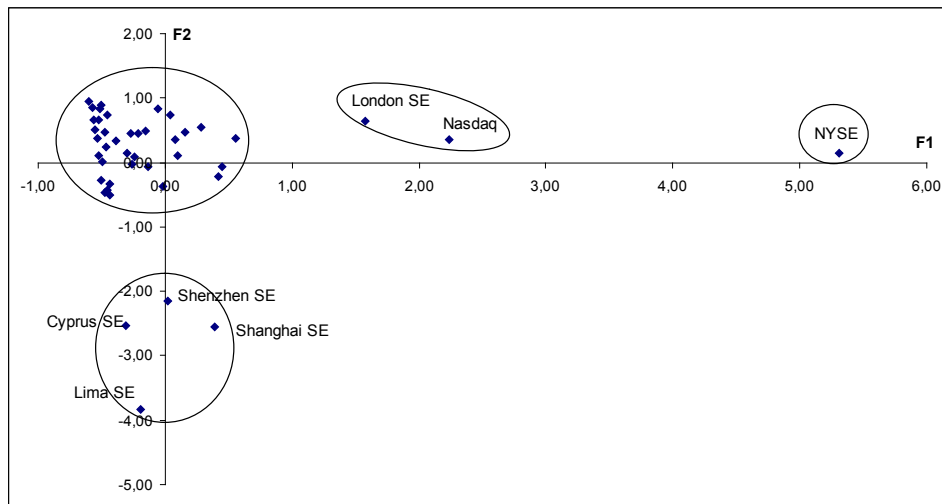
Badania nad wzajemnym wpływem rynków finansowych w różnych częściach świata trwają już od wielu lat, jednak problem ten pozostaje wciąż aktualny szczególnie w obliczu wydarzeń z połowy 2008 roku. Od momentu, gdy na amerykańskim rynku kredytowym nastąpił kryzys i pojawiły się pierwsze straty na giełdach, inwestorzy zaczęli masowo wycofywać środki finansowe z parkietu, aby ulokować je w bezpiecznych obligacjach skarbu państwa. Sytuacja niepewności szybko przeniosła się na stary kontynent i w konsekwencji w ciągu kilku dni i tygodni na każdej giełdzie widoczne były spektakularne spadki cen walorów, czasami skutkujące zawieszaniem sesji giełdowych. Dzięki nagłośnieniu w mediach „chaosu ekonomicznego” na świecie

ucichły wszelkie dyskusje, czy gospodarki (w tym giełdy) poszczególnych państw są od siebie istotnie zależne, a analitycy skupili się na badaniu siły i kierunku tego wpływu. Wydaje się, że terazniejsze ekstremalne wydarzenia będą stanowić za kilka miesięcy idealny materiał dla ekonometryków do zbadania powiązań makroekonomicznych. Już dziś natomiast są interesującym obszarem do rozwijania narzędzi badawczych dla tych celów. Celem niniejszego artykułu jest zbadanie relacji między giełdami papierów wartościowych, które wcześniej zostały pogrupowane metodami taksonometrycznymi w rozdzielne klasy. Praca jest kontynuacją wcześniejszych badań autora nad klasyfikacją giełd na świecie, które obecnie będą analizowane pod względem wzajemnego oddziaływania. Narzędziami badawczymi zastosowanymi w tym celu są wielowymiarowe modele klasy GARCH (*Multivariate GARCH Models*).

Klasyfikacja giełd

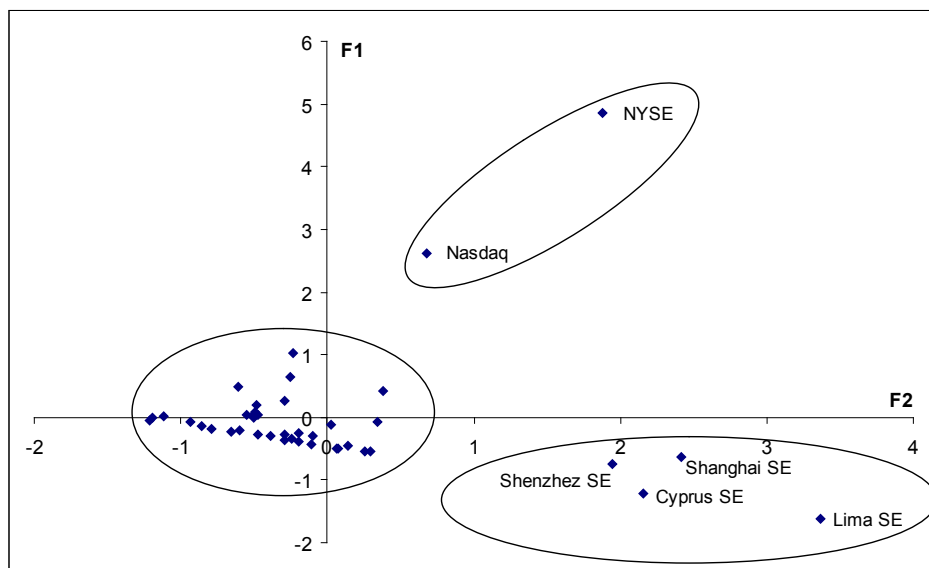
Przystępując do analizy wzajemnego wpływu gospodarek lub samych giełd papierów wartościowych (jako ich reprezentantów), warto wcześniej zbadać, czy porównywane kraje są do siebie podobne, czy pochodzą z zupełnie odległych sobie obszarów ekonomicznych. Inną wartością będzie bowiem miała informacja, że dwie, trzy podobne giełdy europejskie silnie ze sobą korelują w zakresie stóp zwrotu, a inną – gdy wpływ zmian kursu Nasdaq z wczorajszego dnia będzie istotnie regulował kształtowanie indeksu małej giełdy w Azji. W celu usystematyzowania powiązań międzygiełdowych pomocne stały się metody taksonometryczne, które posłużyły do pogrupowania największych parkietów w rozłączne klasy. Wśród nich dużą efektywnością wykazały się metody aglomeracyjne i podziałowe, pozwalające w przejrzysty sposób zaprezentować wyniki klasyfikacji, dlatego w niniejszej pracy zdecydowano się przytoczyć wyniki jednej z nich – metody głównych składowych. Na rysunkach 1 i 2 zaprezentowano podział 50 największych giełd papierów wartościowych (przyjęte do badania giełdy stanowią ponad 80% kapitalizacji światowego rynku papierów wartościowych liczącego około 330 parkietów) na kilka grup w przestrzeni dwóch składowych, agregujących najważniejsze kryteria porównawcze: kapitalizację giełdy, liczbę notowanych spółek, liczbę transakcji, wartość obrotu akcjami, stopy zwrotu na głównych indeksach giełdowych itp. Szczegóły przeprowadzonych klasyfikacji znajdują się w cytowanych pracach [Chruściński 2007 i 2008]. Zamieszczone wyniki analiz taksonometrycznych mają posłużyć jako podstawa do zbadania kierunku przepływu informacji pomiędzy poszczególnymi grupami parkietów.

Rysunek 1. Rozkład giełd w przestrzeni dwóch głównych składowych dla danych od stycznia do grudnia 2007 roku



Źródło: T. Chruściński, *Analiza wielowymiarowa giełd papierów wartościowych na świecie*, -Wiadomości Statystyczne, GUS, Warszawa 2008, nr 9, s. 53.

Rysunek 2. Rozkład giełd w przestrzeni dwóch głównych składowych dla danych od stycznia do grudnia 2006 roku



Źródło: T. Chruściński, *Klasyfikacja giełd papierów wartościowych z wykorzystaniem metod taksonometrycznych*, [w:] *Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych*, pod red. B. Borkowskiego, Wyd. SGGW, Warszawa 2007, s. 42.

Pomimo różnych okresów analiz oraz różnych zastosowanych zmiennych grupujących, te same giełdy zostały podzielone, jak wynika z rysunków 1. i 2., na podobne grupy. Fakt ten pozwala sformułować wniosek, że z pewną tolerancją przedstawiona klasyfikacja dość obiektywnie traktuje odrębność analizowanych grup parkietów. W obu badaniach osobną klasę tworzą giełdy o słabej informacyjnie efektywności inwestycji (wyższe od średniej stopy zwrotu), osobną – giełdy najbogatsze w walory i kapitał oraz osobną (największą) – parkiety o umiarkowanym rozwoju gospodarczym.

Wielowymiarowy model klasy GARCH

Dysponując mapą podziału giełd, wynikającą z poprzednich analiz autora, podjęto próbę określenia, w jakim kierunku przepływają informacje pomiędzy wyodrębnionymi grupami, a tym samym zbadania, jaki jest wzajemny wpływ ich oddziaływania. W badaniu posłużono się wielowymiarowym modelem MGARCH, opierając się na dziennych stopach zwrotu z głównych indeksów. Ponieważ trudnością byłoby przeanalizowanie zmian wszystkich indeksów, zdecydowano się na wybór reprezentantów grup i do specyfikacji równań modelu przyjęto proste stopy zwrotu (1) z indeksów: Nasdaq, Dow Jones, S&P500, DAX, CAC40, FTSE100, SSE Comp. oraz WIG20.

Punktem wyjścia analizy są pojęcia warunkowych wartości oczekiwanych, warunkowej macierzy wariancji-kowariancji oraz warunkowego rozkładu standaryzowanych reszt modelu, danego równaniem:

$$r_t = 100(h P_t - h P_{t-1}) = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sqrt{h_t} z_t, \quad (1)$$

gdzie P_t – wartość indeksu w okresie t , P_{t-1} – wartość indeksu w okresie $t-1$, μ_t – warunkowa wartość oczekiwana stopy zwrotu r_t w chwili t ($\mu_t = E[r_t | I_{t-1}]$), ε_t – reszta modelu, h_t – warunkowa wariancja stopy zwrotu w chwili t ($h_t = \text{var}[r_t | I_{t-1}]$), z_t – niezależne reszty modelu o zerowej średniej i jednostkowej wariancji, I_{t-1} – informacja dostępna w chwili t .

Więcej informacji metodologicznych na temat modelowania procesów stochastycznych można znaleźć w literaturze [Koško, Osińska, Stempińska 2007; Osińska 2006]. W niniejszym artykule skupiono uwagę na najważniejszych kwestiach konstrukcji modelu MGARCH.

Chociaż od zaproponowania przez Engla [5] w 1982 roku i Bollersleva [2] w 1986 roku jednorównaniowych modeli ARCH i GARCH minęło ponad 20 lat, ich podejście do zmiennych w czasie wariancji stóp zwrotu jest wciąż aktualne i rozwijane. Naturalnym rozszerzeniem modeli GARCH na potrzeby analiz rynków finansowych stał się wprowadzony przez Bollersleva

w 1988 roku model wielowymiarowy MGARCH (*Multivariate GARCH*). W części empirycznej niniejszej pracy ten właśnie model posłuży do opisu wzajemnego wpływu giełd na świecie.

Ogólna postać modelu wielowymiarowego, który jest odpowiednikiem jednorównaniowego modelu GARCH(1,1) określona w pracy [1] nazwą VECH-GARCH dana jest równaniem:

$$vech(H_t) = vech(W) + Avech(\epsilon_{t-1}^T \cdot \epsilon_{t-1}) + Bvech(H_{t-1}), \quad (2)$$

gdzie operator $vech(\cdot)$ jest operatorem wektoryzacji symetrycznej.

Aby estymacja modelu (2) była poprawnie przeprowadzona, konieczne jest spełnienie szeregu warunków. Należy zapewnić dodatnią określoność i stacjonarność macierzy H_t dla każdej chwili t , co wymaga dodatniej określoności macierzy A oraz B i jest związane z wprowadzeniem bardzo skomplikowanych nieliniowych warunków ograniczających. Podstawową konsekwencją pełnej postaci równania VECH jest konieczność oszacowania dużej liczby parametrów, która już modelu dwuwymiarowym wynosi 21. Problemy te powodują, że model znalazł małe zastosowanie w praktyce. Rozwiązaniem okazały się modele z diagonalnymi macierzami A i B , które zredukowały liczbę szacowanych parametrów i wyeliminowały tzw. **efekt przenikania wariancji** poprzez uzależnienie elementów macierzy H_t od swoich przeszłych wartości $h_{j,t}$ oraz iloczynów błędów z chwili t ($\epsilon_{i,t} \epsilon_{j,t}$). Ogólna postać diagonalnego modelu VECH (DVECH) jest następująca:

$$H_t = W + \bar{A} \circ (\epsilon_{t-1}^T \epsilon_{t-1}) + \bar{B} \circ H_t \quad (3)$$

$$\bar{A} = ivech(diag(A)) \quad \bar{B} = ivech(diag(B))$$

gdzie iloczyn $X \circ Y$ to iloczyn Hadamarda, a $ivech(\cdot)$ jest operatorem odwrotnym do $vech(\cdot)$.

Po sprowadzeniu macierzy A i B do ich postaci diagonalnych otrzymujemy ostateczną postać modelu DVECH (4), która jest rozszerzeniem modelu GARCH(1,1) [por. 9].

$$\begin{aligned} h_{1,t} &= \omega_1 + a_1 \epsilon_{1,t-1}^2 + b_1 h_{1,t-1} \\ h_{2,t} &= \omega_2 + a_2 \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} + b_2 h_{2,t-1} \\ h_{2,t} &= \omega_2 + a_2 \epsilon_{2,t-1}^2 + b_2 h_{2,t-1} \end{aligned} \quad (4)$$

Szczególną odmianą modelu VECH jest model BEKK, który w prosty sposób rozwiązuje problem braku dodatniej macierzy kowariancji. Ponieważ

jednak trudno uzyskać stacjonarność macierzy H_t oraz małą liczbę szacowanych parametrów [por. 8], podobnie stosuje się diagonalne macierze A i B uzyskując model DBEKK (2):

$$H_t = W^T W + A^T \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1} A + B^T H_{t-1} B. \quad (5)$$

Dzięki zastosowaniu postaci diagonalnych można zastosować estymację każdego z równań modeli (3) i (5) osobno, unikając w ten sposób szeregu problemów optymalizacyjnych metody największej wiarygodności dla kilku równań jednocześnie. W przykładzie empirycznym zastosowano maksymalizację funkcji największej wiarygodności określoną wzorem:

$$LLF = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln |H_t| + \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t \right]. \quad (6)$$

Badanie zależności między wybranymi indeksami giełdowymi za pomocą modelu MGARCH

Do badania wykorzystano dzienne stopy zwrotu na głównych indeksach giełdowych z wybranych krajów pochodzących z klasyfikacji na rysunkach 1 i 2. Szeregi czasowe dostosowano do porównywalności poprzez usunięcie stóp zwrotu dla okresów, w których brakowało danych choćby dla jednego okresu. Ostatecznie otrzymano 2122 obserwacji z okresu od stycznia 2001 roku do września 2008 roku. Dla tak przygotowanych danych zbudowano modele klasy diagonal VECM, diagonal BEKK oraz dla porównania model stałej korelacji warunkowej CCC w celu oceny, który z nich będzie najlepiej dopasowany do rzeczywistości. Po oszacowaniu kilkudziesięciu modeli zdecydowano się na wykorzystanie warunkowego rozkładu t -Studenta, który dał lepsze rezultaty oszacowań parametrów niż rozkład normalny. Wszystkie obliczenia dokonano w programie EViews.

Celem badania było określenie kierunku wpływu giełdy reprezentującej jedną grupę na reprezentanta innej, dlatego, mając do dyspozycji stopy zwrotu z 8 indeksów, próbowano 136 wielowymiarowych kombinacji. Ostatecznie zdecydowano się na zaprezentowanie wyników 20 z oszacowanych modeli z zaznaczeniem, która metoda estymacji dała najlepsze rezultaty. Kryterium wyboru była wartość AIC. Wyniki porównań przedstawia tabela.

Tabela. Porównanie wyników estymacji modeli według kryterium AIC

Model	Wartości kryterium AIC			Optymalny model
	DVECH	DBEKK	CCC	
①=f(⑥, ⑤); ⑥=f(③, ⑤); ③=f(④)	-18,56881	-18,54161	-18,58341	DBEKK
①=f(⑥, ⑤); ⑥=f(③, ⑤); ⑤=f(③, ⑦, ⑥)	-19,55934	-19,53806	-19,51832	CCC
①=f(②, ⑤); ⑤=f(③, ⑦, ⑥); ③=f(④)	-18,71817	-18,69298	-18,74155	DBEKK
①=f(③, ⑤); ⑤=f(③, ⑦, ⑥); ③=f(④)	-18,72976	-18,70648	-18,75357	DBEKK
①=f(④, ⑤); ⑤=f(③, ⑦, ⑥); ④=f(③)	-18,78430	-18,76265	-18,80498	DBEKK
①=f(②, ⑥); ⑥=f(③, ⑤); ②=f(④)	-17,91913	-17,89685	-17,93182	DBEKK
①=f(③, ⑥); ⑥=f(③, ⑤); ③=f(④)	-18,61192	-18,58617	-18,62517	DBEKK
①=f(④, ⑥); ⑥=f(③, ⑤); ④=f(③)	-18,65632	-18,63116	-18,67265	DBEKK
①=f(②, ⑦); ⑦=f(③, ⑤); ②=f(④)	-18,65502	-18,63271	-18,68123	DBEKK
①=f(③, ⑦); ⑦=f(③, ⑤); ③=f(④)	-19,33070	-19,30723	-19,35255	DBEKK
①=f(④, ⑦); ⑦=f(③, ⑤); ④=f(③)	-19,39627	-19,37578	-19,41151	DBEKK
⑧=f(①, ⑦); ⑦=f(③, ⑤); ①=f(②, ⑤)	-18,30720	-18,27133	-18,31225	DBEKK
⑧=f(①, ⑦); ⑦=f(③, ⑤); ①=f(③, ⑥)	-18,30173	-18,26822	-18,30554	DBEKK
⑧=f(①, ⑦); ⑦=f(③, ⑤); ⑥=f(③, ⑤)	-18,31221	-18,27619	-18,31547	DBEKK
⑤=f(③, ⑦, ⑥); ⑦=f(③, ⑤); ⑥=f(③, ⑤)	-21,34503	-21,32210	-21,29213	CCC
⑤=f(③, ⑦, ⑥); ③=f(④); ⑥=f(③, ⑤)	-20,53038	-20,50482	-20,47969	CCC
⑤=f(③, ⑦, ⑥); ③=f(④); ⑦=f(③, ⑤)	-20,46794	-20,44266	-20,47782	DBEKK
⑥=f(③, ⑤); ⑤=f(③, ⑦, ⑥); ③=f(④)	-20,53038	-20,50482	-20,47969	CCC
⑥=f(③, ⑤); ⑤=f(③, ⑦, ⑥); ⑦=f(③, ⑤)	-21,34503	-21,32210	-21,29213	CCC
⑦=f(③, ⑤); ⑤=f(③, ⑦, ⑥); ③=f(④)	-20,46794	-20,44266	-20,47782	DBEKK

Objaśnienie: z uwagi na ograniczoną objętość artykułu w zapisie modeli wielorównaniowych posłużono się symboliką opisującą stopy zwrotu: ① – r_t (WIG20), ② – r_t (NASDAQ), ③ – r_t (S&P500), ④ – r_t (DJIA), ⑤ – r_t (CAC40), ⑥ – r_t (DAX), ⑦ – r_t (FTSE250), ⑧ – r_t (SSE Comp.).

Źródło: obliczenia własne w programie EViews 6.0

Zakończenie

Przeprowadzone badanie z wykorzystaniem 8 indeksów jako reprezentantów grup giełd papierów wartościowych wyznaczonych metodami taksonometrycznymi pozwoliło na określenie kierunku oddziaływania na siebie poszczególnych gospodarek. I tak, najbogatsze i najbardziej rozwinięte parkiety, które stanowią zbiory 1-, 2-elementowe (NYSE, Nasdaq), zależą tylko od siebie wzajemnie, tzn. nie reagują na zmiany kursowe innych indeksów. Giełdy z najliczniejszej grupy umiarkowanych, do których zaliczono

niemiecką, francuską, londyńską oraz polską, silnie zależą szczególnie od amerykańskich zmian indeksu S&P500, a ponadto od siebie (FTSE100, CAC40, DAX) z pominięciem WIG20. Warszawska giełda ma jednak swój współdziałal (łącznie z giełdą londyńską) w kształtowaniu się sytuacji na parkietach w Chinach (SSE Comp.). Widoczny jest zatem światowy przepływ informacji z dnia poprzedniego od „niezależnych” giełd amerykańskich w kierunku większych parkietów europejskich, a następnie w stronę Wschodu. Zastosowane modele potwierdziły intuicyjne przypuszczenia o przewadze bogatszych gospodarek nad biedniejszymi, a ich kolejne aplikacje na większym zbiorze giełd mogą pomóc ujawnić mniej wyraźne finansowe powiązania między krajami. W zakresie badania wzajemnego oddziaływania rynków kapitałowych najlepsze wyniki zwracał diagonalny model BEKK.

Literatura

- Bollerslev T., Engle R., Wooldridge J., *A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariance*, University of Chicago Press, „Journal of Political Economy” 96 (1) 1988.
- Bollerslev T., *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, „Journal of Econometrics” 31/1986, s. 307–327.
- Chruściński T., *Analiza wielowymiarowa giełd papierów wartościowych na świecie*, „Wiadomości statystyczne” 9, GUS, Warszawa 2008.
- Chruściński T., *Klasyfikacja giełd papierów wartościowych z wykorzystaniem metod taksonometrycznych*, [w:] *Metody ilościowe w badaniach Ekonomicznych*, Wyd. SGGW, Warszawa, 2007.
- Engle R., *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation*, „Econometrica” 50/1982, s. 987–1008.
- Koško M., Osińska M., Stempińska J., *Ekonometria współczesna*, TNOIK, Toruń 2007.
- Osińska M., *Ekonometria finansowa*, PWE, Warszawa 2006.
- Piontek K., *Wyzwania praktyczne w modelowaniu wielowymiarowych procesów GARCH*, PN AE Wrocław, „Taksonomia” 13, 2006.
- Yang W., *M-GARCH Hedge Ratios and Hedging Effectiveness in Australian Futures Markets*, Edith Cowan University, 2001.

An Application of Multivariate GARCH Models for the Research Purposes of the Interactions of the Financial Markets

Summary

The article presents information about taxonomic methods of stock-markets classification and selected Multivariate GARCH models. The main emphasis is laid on those markets (countries), which influence others. So far, research has been geared towards three kinds of measurements: diagonal VECH models, diagonal BEKK models, and Constant Conditional Correlation. According to the results obtained, the DBEKK model is optimal for most data-sets.