ACTA UNIVERSITATIS NICOLAI COPERNICI
ZARZĄDZANIE XXXIX – ZESZYT 407 – TORUŃ 2012

Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Katedra Logistyki

Joanna Bruzda

PROGNOZOWANIE METODĄ WYRÓWNYWANIA FALKOWEGO*

Z a r y s t r e ś c i. W artykule dyskutuje się metody wyznaczania prognoz falkowych na podstawie szeregów jednowymiarowych oraz proponuje nowe rozwiązanie w tym zakresie, oparte na nieparametrycznej estymacji losowego sygnału metodą wyrównywania falkowego. Podejście to jest falkowym odpowiednikiem metody wyrównywania wykładniczego, będąc jednak rozwiązaniem znacznie bardziej uniwersalnym przy niewiele większej złożoności obliczeniowej. Badanie empiryczne wykonane na podstawie 17 szeregów czasowych z bazy *M3-IJF-Competition* dostarcza bardzo obiecujących wyników, które potwierdzają przydatność proponowanego rozwiązania.

S ł o w a k l u c z o w e: prognozy falkowe, nieparametryczna estymacja sygnałów, przeskalowywanie falkowe.

WSTĘP

Analiza czasowo-skalowa (falkowa) jest rodzajem analizy częstotliwościowej pozwalającym efektywnie badać zmienne w czasie charakterystyki spektralnej procesów. Chociaż nie jest ona techniką prognostyczną *per se*, jej cechy wyróżniające, takie jak dekompozycja procesów według pasm częstości, do-

* Praca finansowana z grantu MNiSW nr N N111 285135.

bre własności lokalizacyjne w czasie, efektywność obliczeniowa i względna prostota metodyczna nasuwają przypuszczenie, że może być ona użyteczna w prognozowaniu ekonomicznych szeregów czasowych, szczególnie szeregów charakteryzujących się niestacjonarnością, przejawiających krótkookresowe oscylacje o zmiennej amplitudzie, dla których ogniwa poprzedzające w łańcuchach przyczynowych zależą od skali czasu (horyzontu decyzyjnego). Z teoretycznego punktu widzenia falki powinny – z jednej strony – umożliwiać dokładniejszą analizę przez specyfikacje osobnych zależności według pasm częstości, a następnie konstruowanie prognoz oryginalnych szeregów w postaci agregatów prognoz wyznaczonych dla poszczególnych komponentów procesów (skal czasu), z drugiej zaś – upraszczać analizę przez przekształcenie szeregu do postaci, dla której może być łatwiej dobrać odpowiedni predyktor. W tym drugim przypadku zakłada się, że dekompozycja falkowa upraszcza strukturę procesów, czyniąc je łatwiejszymi w prognozowaniu (por. Kaboudan, 2005). Należy jednak pamiętać o możliwych wadach takiego podejścia, wiążących się z większa ilością parametrów podlegających estymacji i arbitralnością wyboru falki czy poziomu dekompozycji.

Celem artykułu jest zaprezentowanie metod konstrukcji prognoz falkowych ograniczonych do przypadku prognoz konstruowanych na podstawie szeregów jednowymiarowych, ocena użyteczności predyktorów falkowych z punktu widzenia m.in. zastosowań logistycznych oraz propozycja nowego rozwiązania w zakresie sposobu wykorzystania falek w prognozowaniu. Proponowana metoda opiera się na nieparametrycznej estymacji losowego sygnału z wykorzystaniem falkowej redukcji szumu, który to sygnał jest następnie prognozowany z użyciem liniowych bądź nieliniowych modeli typu autoregresyjnego. W dotychczasowych pracach falkowe metody redukcji szumu jako podstawę prognozowania zawężano jedynie do tzw. falkowej eliminacji progowej (ang. *wavelet thresholding*) – patrz Alrumaih, Al-Fawzan (2002), Ferbar, Čreslovnik, Mojškerc, Rajgelj (2009), Schlüter, Deuschle (2010). W artykule argumentuje się, że progowanie falkowe ma zastosowanie jedynie w przypadku sygnałów deterministycznych, proponowane zaś tutaj wyrównywanie falkowe zakłada *implicite*, że badany sygnał ma charakter losowy i – wobec tego – jedynie przeskalowuje się spektrum badanego procesu, zwłaszcza w zakresie częstości wysokich, a nie redukuje jego wartość do zera. Proponowaną metodę prognozowania weryfikuje się w oparciu o 17 szeregów czasowych z bazy *M3-IJF-Competition* (patrz np. Makridakis, Hibon, 2000), wskazując na jej przewagę nad klasycznym wyrównywaniem wykładniczym, błądzeniem przypadkowym czy liniowymi modelami autoregresji.

1. DYSKRETNA ANALIZA FALKOWA

Analiza falkowa polega na dekompozycji szeregu na składowe będące przesuniętymi i przeskalowanymi wersjami pewnej funkcji $\psi(x)$ zwanej falką podstawową, wycałkowującej się do zera i mającej jednostkową energię. Dekompozycja ta może mieć różny charakter w zależności od rodzaju zastosowanej transformaty falkowej. W przypadku tzw. analizy dyskretnej (DWT – ang. *Discrete Wavelet Transform*), która pojawia się najczęściej w zastosowaniach prognostycznych, efektem transformacji są współczynniki falkowe zdefiniowane dla oktaw częstości, co skutkuje oszczędną reprezentacją danych. Ponadto rozważanie wyłącznie oktaw częstości może być uzasadnione w przypadku analizy procesów ekonomicznych, dla których – jak się wydaje – posługiwanie się przedziałami częstości, a nie pojedynczymi częstościami nie powinno wiązać się z nadmierną utratą informacji, co nastąpi w szczególności w przypadku procesów, których dynamika zależy od diadycznej skali czasu.

Dyskretną transformatę falkową (dyskretnego) sygnału $f(x)$ definiuje się następująco:

$$W_{j,t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{j,t}(x)\,dx\,, \tag{1}$$

gdzie $j = 1, 2, ..., J$, $t = 0, 1, ..., 2^{J-j}-1$, funkcje zaś $\psi_{j,t}(x)$ są wersjami falki podstawowej, przesuniętymi i przeskalowanymi na skali diadycznej, tj.:

$$\psi_{j,t}(x) = 2^{-j/2}\psi\left(2^{-j}x - t\right). \tag{2}$$

Falka podstawowa jest zwykle definiowana za pomocą tzw. funkcji skalującej, $\phi(x)$. Splot odpowiednio przeskalowanej i przesuniętej funkcji skalującej z sygnałem dostarcza tzw. współczynników skalujących postaci:

$$V_{j,t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_{j,t}(x)\,dx \tag{3}$$

Te dwa rodzaje współczynników tworzą dekompozycję wyjściowej funkcji postaci:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_t V_{J,t}\phi_{J,t}(x) + \sum_t W_{J,t}\psi_{J,t}(x) + \cdots + \sum_t W_{1,t}\psi_{1,t}(x) \\ &= S_J(x) + D_J(x) + D_{J-1}(x) + \cdots + D_1(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Funckje $S_J(x)$ and $D_J(x)$ znane są jako wartości wygładzone lub aproksymacje (ang. *smooths*) i detale (ang. *details*). Aproksymacje z najwyższego poziomu, $S_J(x)$, reprezentują komponent niskoczęstotliwościowy procesu, podczas gdy detale $D_1(x), D_2(x), \ldots, D_J(x)$ są związane z oscylacjami o okresach z przedziałów 2–4, 4–8, …, 2^J–2^{J+1}. Dekompozycja postaci (4) określana jest jako analiza wielorozdzielcza (ang. *multiresolution analysis*).

Rozważmy wektor długości $N = 2^{J_0}$ postaci $x = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})'$. Wówczas możliwa jest maksymalnie J_0-poziomowa dekompozycja szeregu, przy czym liczby (konwencjonalnych) współczynników falkowych i skalujących z każdego poziomu są następujące: $N/2, N/4, \ldots, 1$. Natomiast tzw. maksymalnie nachodząca (ang. *maximal overlap*) dyskretna transformata falkowa (MODWT), zwana również transformatą niezdziesiątkowaną lub ciągło-dyskretną, dostarcza takiej samej liczby współczynników obu typów (odpowiednio $\widetilde{W}_{j,t}$ i $\widetilde{V}_{j,t}$) na każdym poziomie dekompozycji ze względu na brak operacji podpróbkowania (decymacji), przy czym liczba ta wynosi N. Współczynniki te po przeskalowaniu, które służy zachowaniu energii, dane są następująco:

$$W_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} h_{j,l} x_{[2^j(t+1)-1-l] \bmod N}, \quad t = 0, \ldots, 2^{J-j}-1, \tag{5}$$

$$2^{j/2}\widetilde{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} h_{j,l} x_{(t-l) \bmod N}, \quad t = 0, \ldots, N-1, \tag{6}$$

$$V_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} g_{j,l} x_{[2^j(t+1)-1-l] \bmod N}, \quad t = 0, \ldots, 2^{J-j}-1, \tag{7}$$

$$2^{j/2}\widetilde{V}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} g_{j,l} x_{(t-l) \bmod N}, \quad t = 0, \ldots, N-1, \tag{8}$$

gdzie $\{h_{j,l}\}$ i $\{g_{j,l}\}$ są odpowiednimi filtrami j – tego poziomu dekompozycji długości $L_j = (2^j - 1)(L-1) + 1$ (patrz Percival, Walden, 2000, Rozdział 4). $\{h_{j,l}\}$ jest filtrem pasmowym z pasmem przenoszenia $1/2^{j+1} \le |f| \le 1/2^j$, natomiast $\{g_{j,l}\}$ jest filtrem dolnoprzepustowym z częstotliwością odcięcia $1/2^{j+1}$.

Współczynniki falkowe i skalujące nie tworzą jeszcze wielorozdzielczej dekompozycji procesu[1]. W celu przeprowadzenia analizy wielorozdzielczej stosuje się odpowiednie odwrotne przekształcenie falkowe, które prowadzi

[1] Wyjątkiem jest popularna w prognozowaniu falka Haara, której współczynniki falkowe tworzą addytywną dekompozycję wyjściowego sygnału.

bezpośrednio do addytywnej dekompozycji szeregu czasowego. Dekompozycja ta może być wykonana z użyciem zarówno konwencjonalnej, jak i ciągło-dyskretnej transformaty, dostarczając za każdym razem składowych o długości identycznej z oryginalnym sygnałem. Problemem praktycznym, jaki się tu pojawia, są zniekształcenia współczynników falkowych bądź skalujących oraz detali i aproksymacji na krańcach próby. Powoduje to konieczność usuwania odpowiednich współczynników brzegowych i jest szczególnie istotne w przypadku sygnałów niestacjonarnych.

W części trzeciej niniejszej pracy, gdzie prezentowane są metody konstrukcji predyktorów falkowych, zwraca się w szczególności uwagę na to, jakie elementy analizy falkowej stanowią podstawę budowy prognoz: podpróbkowane bądź maksymalnie nachodzące współczynniki falkowe i skalujące czy też odpowiednie detale i wartości wygładzone.

2. METODY KONSTRUKCJI PROGNOZ FALKOWYCH

Wśród metod konstrukcji prognoz falkowych z wykorzystaniem jednowymiarowych szeregów czasowych Schlüter i Deuschle (2010) wyróżniają cztery następujące:

– redukcja reprezentacji czasowo-częstotliwościowej (falkowa redukcja szumu, ang. *wavelet denoising*) z wykorzystaniem techniki eliminacji progowej miękkiej lub twardej;
– falkowe modele strukturalne szeregów czasowych;
– prognozowanie w dziedzinie falkowej (prognozowanie współczynników falkowych);
– prognozowanie z wykorzystaniem lokalnie stacjonarnych modeli falkowych.

W pierwszym z tych podejść bazuje się na obserwacji, że białoszumowy składnik losowy w reprezentacji postaci ‘sygnał + szum’ w jednakowym stopniu zniekształca współczynniki falkowe różnych poziomów dekompozycji. Dlatego dla wszystkich poziomów proponuje się redukcję współczynników co do wartości bezwzględnej mniejszych od wybranej wielkości progowej. Tak zmodyfikowane współczynniki transformuje się następnie do dziedziny czasu, uzyskując przekształcony sygnał wyjściowy. Przekształcone współczynniki otrzymuje się, stosując eliminację progową miękką lub twardą, przy czym ta pierwsza dana jest następująco:

$$W'_{j,t} = W_{j,t} 1_{\{|W_{j,t}| > \lambda\}}, \tag{9a}$$

zaś druga:

$$W'_{j,t} = \mathrm{sig}(W_{j,t})\left(\left|W_{j,t}\right| - \lambda\right)1_{\{|W_{j,t}|>\lambda\}}, \tag{9b}$$

gdzie λ jest przyjętą wartością progową. Wartość progu dyskryminacji może być wyznaczana na podstawie charakterystyk całego szeregu (eliminacja progowa globalna) lub adaptacyjnie (patrz Augustyniak, 2003)[2], lecz w zastosowaniach prognostycznych spotyka się, jak dotąd, jedynie to pierwsze podejście, realizowane najczęściej w oparciu o tzw. próg uniwersalny i implementowane na bazie konwencjonalnej DWT.

W badaniu prezentowanym w pracy Schlütera i Deuschle (2010) okazało się, że falkowa eliminacja progowa poprawia krótkookresowe prognozy generowane z modeli ARMA i ARIMA. Wniosek ten otrzymano na podstawie analizy cen ropy i kursów walut. Podobne wnioski otrzymali Alrumaih, Al-Fawzan (2002), analizując notowania giełdowe. Interesującym artykułem jest praca Ferbara i in. (2009), w której proponuje się zastosowanie metody eliminacji progowej do prognozowania popytu w łańcuchu dostaw. Wedle moje wiedzy jest to pierwsza propozycja aplikacji prognoz falkowych do optymalizacji kosztów w ramach łańcucha dostaw. Z analizy symulacyjnej prezentowanej w cytowanym opracowaniu wynika, że prognozy falkowe mają przewagę nad wygładzaniem wykładniczym, które zostało potraktowane jako metoda benchmarkowa.

Druga metoda wyznaczania prognoz falkowych na podstawie szeregów jednowymiarowych polega na zastosowaniu analizy wielorozdzielczej w celu dekompozycji szeregu, a następnie osobnym modelowaniu i prognozowaniu składowych procesu. Ostateczna prognoza jest sumą prognoz poszczególnych składników. Podejście to zaproponowano w pracy Arino (1995), a stosowane było ono także m.in. przez Wonga i in. (2003) i Fernandez (2008), przy czym Arino i Fernandez rozważają osobne modelowanie dwu składowych procesów, a Wong i in. dekomponują szeregi na trzy części. Na przykład w pracy Arino analizowano miesięczną sprzedaż samochodów w Hiszpanii, przyjmując składnik trendowy postaci $Y = S_7 + D_7 + D_6 + D_5$ oraz składnik zawierający wahania sezonowe i komponent przypadkowy w postaci $Z = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$. Dla każdego z tak zdefiniowanych szeregów dopasowano następnie odpowiedni model (S)ARIMA.

[2] Na temat różnych metod ustalania wartości progu dyskryminacji patrz np. Percival, Walden (2000), Rozdział X, Nason (2008), Rozdział III.

Trzecie podejście do prognozowania jest stosowane m.in. w pracach Chena i in. (2004), Conejo i in. (2005), Renaud i in. (2002) oraz Minu i in. (2010). Na przykład w pierwszej ze wspomnianych prac opracowano oryginalną metodę prognostyczną WAW (skrót od ang. *wavelet-armax-winters*), w myśl której stosuje się transformatę MODWT w celu zdefiniowania komponentów trendu, sezonowości i wysokiej częstotliwości, a następnie prognozuje osobno te składniki z wykorzystaniem metod takich jak wyrównywanie wykładnicze, modele harmoniczne i modele ARMA(X). Ostateczna prognoza powstaje po zastosowaniu odwrotnego przekształcenia falkowego. Natomiast Renaud i in. (2002) wprowadzają modele MAR (ang. *Multiscale Autoregression*), definiowane z wykorzystaniem współczynników konwencjonalnej DWT, przeprowadzanej z użyciem falki Haara, Minu i in. (2010) zaś przekształcają ten model do postaci nieliniowej z zastosowaniem sieci neuronowych. W każdym z przypadków zakłada się *implicite*, że współczynniki falkowe można opisać z wykorzystaniem prostszych modeli niż dane oryginalne.

Czwarta z metod prognozowania falkowego, opracowana przez Fryźlewicza i in. (2003), bazuje na pojęciu lokalnie stacjonarnych procesów falkowych (patrz Nason, 2008, i znajdujące się tam odwołania do literatury). W metodzie tej stosuje się predyktor typu autoregresyjnego o parametrach zmieniających się w czasie, wyznaczanych przez falkowy odpowiednik równań Yule'a–Walkera. Podstawą metody jest niezdziesiątkowana (maksymalnie nachodząca) dyskretna transformata falkowa, a wykorzystanie tej metody w praktyce wymaga estymacji ewolucyjnego spektrum falkowego metodą skorygowanego periodogramu falkowego.

Porównanie jakości różnych metod prognozowania falkowego na podstawie jednowymiarowych rzeczywistych szeregów czasowych prezentowane w pracy Schlütera i Deuschle (2010) wskazuje na przewagę pierwszego i trzeciego podejścia, które są w stanie wygenerować prognozy lepsze od tych uzyskanych metodami klasycznymi.

3. PROGNOZOWANIE Z WYKORZYSTANIEM WYRÓWNYWANIA FALKOWEGO

Jak wspominano we wprowadzeniu, metoda prognozowania oparta na eliminacji progowej zakłada, że prognozowany proces jest sumą deterministycznego sygnału i losowego szumu. Takie założenie skutkuje eliminacją wysokich częstotliwości w szeregu, tj. w praktyce współczynniki falkowe z niższych poziomów dekompozycji (w szczególności z pierwszego poziomu) traktuje się jako szum. Podejście takie jest jednak niewłaściwe, jeśli przyjmie się założenie o losowym charakterze sygnału. Założenie o losowości sygnałów jest podstawą konstrukcji tzw. strukturalnych modeli szeregów czasowych czy modeli wyrównywania wykładniczego i wydaje się bardziej adekwatne w opisie procesów ekonomicznych, dla których zwykle lepsze efekty w modelowaniu daje przyjmowanie paradygmatu losowości i których kształt spektrum odbiega od spektrów w reprezentacjach ‘funkcja deterministyczna + biały szum’.

Załóżmy, że interesujący nas proces jest generowany według modelu:

$$Y_t = X_t + \eta_t, \tag{10}$$

gdzie η_t jest białym szumem nieskorelowanym z X_t dla wszystkich opóźnień i wyprzedzeń. Chcąc oszacować sygnał X_t, rozwiązujemy następujący problem:

$$E\left\|X - \hat{X}\right\|^2 \to \min, \tag{11}$$

gdzie X i $\hat{X}$ są wektorami (wierszowymi) długości T odpowiednio – wartości sygnału i jego ocen. Z własności przekształcenia falkowego otrzymujemy:

$$E\left\|X - \hat{X}\right\|^2 = E\left\|W^X - \hat{W}^X\right\|^2 = \sum_{j=1}^{J} E\left\|\widetilde{W}_j^X - \hat{\widetilde{W}}_j^X\right\|^2 + E\left\|\widetilde{V}_j^X - \hat{\widetilde{V}}_j^X\right\|^2, \tag{12}$$

gdzie W^X i $\hat{W}^X$ są wektorami długości T współczynników klasycznej DWT sygnału i jego oceny, $\widetilde{W}_j^X$, $\widetilde{V}_j^X$, $\hat{\widetilde{W}}_j^X$, $\hat{\widetilde{V}}_j^X$ są odpowiednimi wektorami długości T współczynników MODWT, J jest zaś przyjętym poziomem dekompozycji. Dalej zakłada się, że analizowane współczynniki falkowe mają średnią 0, co jest równoważne założeniu, że filtry falkowe mają wystarczającą liczbę zerowych momentów dla eliminacji komponentów deterministycznych badanego szeregu. Ponadto zakłada się także stacjonarność tych współczynników.

W dalszej kolejności przyjmujemy estymator postaci[3]:

[3] Propozycję taką wysuwają Percival i Walden (2000), s. 407, w odniesieniu do współczynników konwencjonalnej transformaty falkowej. W niniejszej pracy koncentrujemy się na współczynnikach transformaty niezdziesiątkowanej z kilku powodów. Po pierwsze, dają one dokładniejsze estymatory wariancji falkowej wykorzystywane dalej w operacyjnej wersji proponowanego nieparametrycznego estymatora sygnału. Po drugie, transformata niezdziesiątkowana działa na szeregach dowolnej długości (niekoniecznie

$$\hat{\tilde{W}}_j^X = a_j \tilde{W}_j^Y \tag{13}$$

i rozwiązujemy zadanie:

$$E\left\| \tilde{W}_j^X - \hat{\tilde{W}}_j^X \right\|^2 \to \min, \tag{14}$$

otrzymując rozwiązanie postaci:

$$a_j = \frac{E\left(\tilde{W}_{jt}^X \tilde{W}_{jt}^Y\right)}{E\left(\tilde{W}_{jt}^Y\right)^2}. \tag{15}$$

Następnie, korzystając z faktu, że $\tilde{W}_j^Y = \tilde{W}_j^X + \tilde{W}_j^\eta$ oraz z nieskorelowania elementów wektorów $\tilde{W}_j^X$ i $\tilde{W}_j^\eta$, dostajemy:

$$a_j = \frac{E\left(\tilde{W}_{jt}^X\right)^2}{E\left(\tilde{W}_{jt}^Y\right)^2} = 1 - \frac{E\left(\tilde{W}_{jt}^\eta\right)^2}{E\left(\tilde{W}_{jt}^Y\right)^2}.$$

Zauważmy ponadto, że z założenia o białoszumowści ηt wynika, iż:

$$E\left(\tilde{W}_{jt}^\eta\right)^2 = \frac{1}{2^{j-1}} E\left(\tilde{W}_{1t}^\eta\right)^2.$$

Jeśli teraz przyjmiemy, że wariancja falkowa szumu na pierwszym poziomie dekompozycji (tj. dla skali λ_1) dana jest następująco:

$$\sigma_\eta^2(\lambda_1) = E\left(\tilde{W}_{1t}^\eta\right)^2 = h \cdot \sigma_Y^2(\lambda_1) = h \cdot E\left(\tilde{W}_{1t}^Y\right)^2 \quad \text{dla pewnego } h \in [0,1],$$

to ostatecznie otrzymujemy:

długości będącej potęgą liczby 2). Ponadto można wykazać, że w przypadku stosowania przekształcenia odwrotnego podejście takie wiąże się z mniejszym błędem średniokwadratowym estymacji sygnału (patrz Bruzda, 2011) niż pokazuje to formuła (12), opisująca odpowiedni błąd wynikający z zastosowania transformaty zdziesiątkowanej. Dodatkowo, oceny sygnału uzyskane tą metodą nie zależą od momentu czasu, w którym rozpoczynamy wyznaczanie współczynników falkowych, co wiąże się z niezmienniczością transformaty MODWT względem przesunięć kołowych.

$$\hat{\tilde{W}}_j^X = \left[1 - \frac{h}{2^{j-1}} \frac{\sigma_Y^2(\lambda_1)}{\sigma_Y^2(\lambda_j)}\right] \tilde{W}_j^Y, \tag{16}$$

gdzie $\sigma_Y^2(\lambda_j) = E\left(\tilde{W}_{jt}^Y\right)^2$ jest wariancją falkową procesu Y_t dla skali $\lambda_j = 2^{j-1}$ (j = 1, 2, …, J). Skorzystanie ze wzoru (16) będzie w praktyce wymagać zastąpienia wariancji falkowych $\sigma_Y^2(\lambda_j)$ ich ocenami uzyskanymi na podstawie współczynników MODWT[4].

Proponowaną procedurę falkowej nieparametrycznej estymacji sygnału losowego należy uzupełnić dalszymi dwoma rozwiązaniami szczegółowymi. Po pierwsze, do tej pory nie dyskutowaliśmy jeszcze sposobu redukcji współczynników skalujących. W tym zakresie można zaproponować albo pozostawienie ich w niezmienionej postaci (por. Percival, Walden, 2000, s. 424), co ma uzasadnienie w przypadku procesów niestacjonarnych kowariancyjnie, albo przeskalowanie odchyleń tych współczynników od ich wartości średniej m_t w sposób zgodny ze wzorem (17), tj. następująco:

$$\hat{\tilde{V}}_{jt}^X = m_t + \left[1 - \frac{h}{2^{j-1}} \frac{\sigma_Y^2(\lambda_1)}{E\left(\tilde{V}_{jt}^Y - m_t\right)^2}\right] \cdot \left[\tilde{V}_{jt}^Y - m_t\right], \tag{17}$$

co może mieć praktyczne zastosowanie w przypadku procesów niestacjonarnych w średniej oraz procesów stacjonarnych.

Drugie uzupełnienie procedury estymacji dotyczy sposobu uzyskania końcowej oceny sygnału. Z zasady ma tu zastosowanie odwrotne przekształcenie falkowe, co rodzi jednak potrzebę ustalenia przeskalowanych wartości współczynników także poza próbą estymacyjną, gdyż filtry odwrotnego przekształcenia falkowego są symetrycznymi filtrami nieprzyczynowymi. W niniejszej pracy proponuje się więc rozwiązanie dwojakiego rodzaju. Po pierwsze, przy przyjęciu niskich poziomów dekompozycji oraz filtrów falkowych i skalujących Haara zastosowanie ma prosta formuła postaci (patrz Bruzda, 2011):

$$\hat{\hat{X}} = \hat{\tilde{V}}_J + \hat{\tilde{W}}_1 + \ldots + \hat{\tilde{W}}_J. \tag{18}$$

W szczególności przy dekompozycji jednopoziomowej błąd estymacji sygnału związany z estymatorem (18) jest dany wzorem (12), a przy wyższych

[4] Na temat własności DWT- i MODWT-estymatorów wariancji falkowej patrz np. Percival, Walden (2000), Rozdział VIII.

poziomach jest od niego większy. Do oceny sygnału uzyskanej wzorem (18) stosuje się w etapie postestymacyjnym założone proste metody prognozowania (np. model błądzenia przypadkowego czy modele autoregresyjne). Niewątpliwą zaletą tego podejścia jest to, iż opiera się ono w całości na filtrach przyczynowych i, jako takie, nie wymaga prognozowania współczynników falkowych.

Drugie rozwiązanie polega natomiast na przeniesieniu całego procesu prognozowania do dziedziny falkowej, co wiąże się z wyznaczeniem osobnych prognoz dla współczynników z różnych poziomów dekompozycji w horyzoncie obejmującym założony na początku horyzont predykcji i powiększonym o okres niezbędny dla przeprowadzenia transformaty odwrotnej. Podejście to nawiązuje więc do założenia, w myśl którego współczynniki falkowe i współczynniki skalujące można prognozować z użyciem prostszych narzędzi niż procesy oryginalne. W praktyce – ze względu na problemy związane z koniecznością ekstrapolacji próby już na etapie estymacyjnym – zastosowanie mogą mieć krótkie filtry Daubechies. Warto natomiast podkreślić, że w zakresie samej jedynie estymacji sygnału błąd średniokwadratowy jest tutaj niższy od wartości danej wzorem (12).

4. OCENA WŁASNOŚCI PREDYKTYWNYCH PROPONOWANEGO NARZĘDZIA

W celu praktycznej weryfikacji proponowanej metody prognozowania zastosowano ją do wyznaczenia prognoz 17 szeregów gospodarczych z bazy *M3-IJF-Competition*. Były to szeregi o numerach: N2863–N2883, które wybrano ze względu na to, iż wydają się one mieć stałą wartość średnią, tj. nie zawierają wyraźnej tendencji wzrostowej lub spadkowej. Metodę zaimplementowano, przyjmując pierwszy sposób podejścia do współczynników skalujących[5] oraz ustalając arbitralnie stałą wygładzania na poziomie $h = 0.5$. Rozważono dwa najkrótsze filtry falkowe Daubechies (falkę Haara i falkę $d4$), po 20 prognoz w horyzoncie od jednego do pięciu okresów, wydłużając stopniowo próbę o jedną obserwację, szacując za każdym razem wariancje falkowe i wyznaczając nowe prognozy i błędy *ex post*. W charakterze prostych z założenia metod prognozowania współczynników transformaty MODWT oraz oszaco-

[5] W istocie, dalsze wyniki przeprowadzonego badania wskazują, że drugi sposób potraktowania tych współczynników, tj. przyjęcie formuły (17) z wartością m szacowaną na poziomie średniej arytmetycznej szeregu, dostarcza jeszcze bardziej przekonywających wyników na rzecz proponowanej tutaj metody.

wanego sygnału przyjęto modele takie jak błądzenie przypadkowe oraz modele autoregresyjne dla poziomów i przyrostów z liczbą opóźnień ustaloną zgodnie ze wskazaniem kryterium AIC[6]. W przypadku falki Haara zastosowano podejście bez inwersji (patrz wzór (18)) oraz z inwersją. Przyjęto do pięciu poziomów dekompozycji w metodzie bez inwersji, do czterech w metodzie z inwersją przy zastosowaniu falki Haara i do dwóch – w metodzie z inwersją przy zastosowaniu falki *d*4. Należy dodać, że prognozowane szeregi czasowe mają długości w przedziale: 76–79, tak więc długość pierwszej próby będącej podstawą estymacji sygnału była liczbą z przedziału 52–55. Dla porównania zastosowano także klasyczne podejście w postaci modelu błądzenia przypadkowego, modelu wyrównywania wykładniczego Browna z optymalizowaną stałą wygładzania i wartością początkową identyczną z pierwszą obserwacją oraz modeli autoregresji dla poziomów i przyrostów dla oryginalnych (nieprzekształconych) danych. W Tabeli 1 prezentuje się średniokwadratowe błędy dla prognoz jednokrokowych, które to prognozy są najczęściej wykorzystywane w logistyce, np. w kontekście optymalizacji rozmieszczenia towarów w magazynie. Należy dodać, że przewaga proponowanego podejścia nad metodami klasycznymi była bardziej widoczna dla dłuższych horyzontów. Dwa najlepsze rezultaty dla każdego szeregu wyróżniono tłustym drukiem.

Wyniki badania można podsumować następująco. Klasyczne metody prognozowania pozwoliły osiągnąć najmniejszy średniokwadratowy błąd prognozy tylko w czterech przypadkach spośród 17 przebadanych. Najlepsze wyniki osiągnięto, stosując falkową wersję wyrównywania wykładniczego realizowaną za pomocą metody bez inwersji, która w wielu sytuacjach pozwoliła znacznie zredukować błąd prognoz. Tylko w jednym przypadku klasyczne wyrównywanie wykładnicze dostarczyło prognoz o mniejszym średnim błędzie. Metody z inwersją uplasowały się na drugiej pozycji, przy czym nie daje się zaobserwować wyraźnej przewagi falki Haara lub falki *d*4. Ponadto można zauważyć, że dobre prognozy uzyskane za pomocą falki *d*4 wydają się korespondować z odpowiednimi prognozami uzyskanymi metodą z inwersją za pomocą falki Haara, ale dla wyższych poziomów dekompozycji.

Zaprezentowany przykład wskazuje, że podejście do prognozowania sugerowane w niniejszej pracy jest obiecujące i może stanowić alternatywę względem klasycznych metod wygładzania szeregów. Do zastosowań praktycznych należy zarekomendować metodę bez inwersji wymagającą użycia falki Haara. Kolejne badania empiryczne na tym samym i rozszerzonym zestawie danych,

[6] Wskazania uzyskane kryterium Schwartza nie różniły się od tych uzyskanych kryterium Akaike'a. Maksymalna liczba opóźnień wynosiła 8.

nieprzytaczane w tym artykule, wskazują także, że dalszą poprawę przynosi wygładzenie współczynników skalujących oraz, co jest oczywiste, optymalizacja stałej *h* i poziomu dekompozycji, wymagająca podziału próby estymacyjnej na dwie części. W dalszych badaniach zwraca uwagę także fakt, że przyjęcie stałej wygładzania *h* na poziomie 1, co w przybliżeniu odpowiada metodzie falkowej eliminacji progowej, dostarcza wyraźnie gorszych wyników niż te przytaczane w pracy, prowadząc w mniejszej liczbie przypadków do dominacji nad metodami klasycznymi.

PODSUMOWANIE

Metoda prognozowania zaproponowana w niniejszym artykule zakłada, że obserwowane szeregi gospodarcze są realizacjami procesów będących sumą losowego (stacjonarnego lub niestacjonarnego) sygnału i szumu będącego procesem czysto losowym. Ważnym etapem procedury prognostycznej jest tu nieparametryczna estymacja sygnału z użyciem metod falkowych. Do wygładzonych szeregów stosuje się proste narzędzia prognostyczne, takie jak metoda naiwna czy modele autoregresyjne. Podstawową zaletą takiego podejścia jest redukcja złożoności obliczeniowej wynikająca z obejścia konieczności estymacji parametrów modeli strukturalnych szeregów czasowych z użyciem takich metod, jak filtracja Kalmanowska. Jednym z możliwych obszarów zastosowań tej metody są prognozy procesów nieliniowych generowanych według prostych modeli typu STAR czy SETAR, zanieczyszczonych dodatkowo szumem białym, jednakże interesujące wyniki otrzymuje się także w przypadku prognozowania procesów liniowych.

Zaprezentowana w artykule analiza empiryczna dostarczyła obiecujących wyników pozwalających na zarekomendowanie do zastosowań praktycznych wariantu metody opartej na falce Haara, który nie wymaga prognozowania współczynników transformaty falkowej. Dalszą poprawę metody można uzyskać, optymalizując stałą wygładzania *h* i liczbę poziomów dekompozycji falkowej oraz – w przypadku procesów stacjonarnych bądź trendo-stacjonarnych – stosując, obok przeskalowywania współczynników falkowych, także redukcję współczynników skalujących. Wydaje się, że proponowana metoda w praktyce może dominować nad innymi mechanicznymi podejściami do prognozowania w rodzaju wyrównywania wykładniczego i średnich ruchomych z arbitralnie przyjmowanym systemem wag. Ze względu na fakt, że uniwersalność tego podejścia nie jest okupiona dużą złożonością obliczeniową, metodę tę można zarekomendować do zastosowań w ramach automatycznych systemów prognostycznych.

Tabela 1. Średniokwadratowe błędy prognoz na jeden okres w przód

	RW	AR	ΔAR	RW	AR	ΔAR	RW	AR	ΔAR	RW	AR	ΔAR	ES
N2863	(H1) 21.80	(H1) 18.14	(H1) 17.30	(H2) 21.99	(H2) 18.80	**(H2)** **17.02**	(H3) 21.68	(H3) 18.98	**(H3)** **16.89**	(H4) 21.59	(H4) 19.22	(H4) 17.08	
	(H5) 21.59	(H5) 23.45	(H5) 20.58	(iH1) 28.34	(iH1) 21.95	(iH1) 19.20	(iH2) 32.67	(iH2) 26.24	(iH2) 23.83	(iH3) 31.40	(iH3) 36.61	(iH3) 33.48	
	(iH4) 30.93	(iH4) 28.48	(iH4) 23.51	(D1) 39.39	(D1) 27.33	(D1) 21.99	(D2) 63.15	(D2) 43.30	(D2) 91.57	20.10	18.81	17.64	20.10
N2864	(H1) 11.03	(H1) 12.71	(H1) 13.12	(H2) 11.04	(H2) 12.55	(H2) 13.03	(H3) 11.04	(H3) 12.86	(H3) 12.80	**(H4)** **11.03**	(H4) 13.15	(H4) 13.21	
	(H5) 11.02	(H5) 19.23	(H5) 17.68	(iH1) 12.01	(iH1) 12.63	(iH1) 12.55	(iH2) 14.00	(iH2) 13.21	(iH2) 13.42	(iH3) 15.61	(iH3) 14.85	(iH3) 14.90	
	(iH4) 15.55	(iH4) 14.65	(iH4) 13.52	(D1) 14.00	(D1) 13.79	(D1) 13.91	(D2) 21.53	(D2) 15.68	(D2) 25.11	11.04	13.26	13.72	11.04
N2865	(H1) 5.761	(H1) 5.522	(H1) 6.912	(H2) 5.734	**(H2)** **5.216**	(H2) 6.649	(H3) 5.802	(H3) 6.330	(H3) 7.692	(H4) 5.791	(H4) 9.509	(H4) 12.29	
	(H5) 5.736	(H5) 19.17	(H5) 26.10	(iH1) 7.035	(iH1) 4.830	(iH1) 7.515	(iH2) 9.175	**(iH2)** **4.719**	(iH2) 6.904	(iH3) 20.25	(iH3) 12.56	(iH3) 8.079	
	(iH4) 38.47	(iH4) >>	(iH4) 16.56	(D1) 7.610	(D1) 7.459	(D1) 8.872	(D2) 14.88	(D2) 8.917	(D2) 84.70	5.594	6.839	7.249	5.610
N2866	(H1) 29.15	(H1) 31.16	(H1) 29.14	**(H2)** **29.44**	(H2) 32.25	(H2) 30.06	(H3) 29.92	(H3) 32.69	(H3) 30.20	(H4) 29.94	(H4) 34.02	(H4) 29.50	
	(H5) 29.86	(H5) 36.55	(H5) 32.55	(iH1) 38.65	(iH1) 36.70	(iH1) 34.62	(iH2) 49.16	(iH2) 42.40	(iH2) 40.32	(iH3) 73.44	(iH3) 52.67	(iH3) 41.13	
	(iH4) 61.73	(iH4) 72.74	(iH4) 52.69	(D1) 49.62	(D1) 42.00	(D1) 41.71	(D2) 80.75	(D2) 61.67	(D2) >>	**27.22**	32.35	29.41	29.98
N2867	(H1) 90.53	(H1) 131.4	(H1) 122.5	(H2) 89.28	(H2) 130.3	(H2) 119.1	(H3) 89.11	(H3) 130.2	(H3) 119.8	(H4) 89.10	(H4) 130.5	(H4) 118.6	
	(H5) 89.31	(H5) 152.0	(H5) 131.3	(iH1) 91.79	(iH1) 130.4	(iH1) 120.0	**(iH2)** **85.83**	(iH2) 121.1	(iH2) 109.3	(iH3) 88.23	(iH3) 121.3	(iH3) 103.5	

Cd. tabeli 1

	RW	AR	ΔAR	RW	AR	ΔAR	RW	AR	ΔAR	RW	AR	ΔAR	ES
	(iH4) 100.1	(iH4) 119.6	(iH4) 105.8	**(D1) 83.06**	(D1) 120.1	(D1) 110.7	(D2) 70.73	(D2) 92.58	(D2) 99.06	96.99	134.5	126.0	102.1
N2868	(H1) 31.88	(H1) 17.06	(H1) 15.89	(H2) 31.33	(H2) 16.28	(H2) 14.57	(H3) 31.19	(H3) 13.98	**(H3) 13.13**	(H4) 31.17	(H4) 13.43	**(H4) 12.65**	
	(H5) 31.14	(H5) 19.30	(H5) 14.63	(iH1) 42.68	(iH1) 19.39	(iH1) 16.56	(iH2) 33.74	(iH2) 25.10	(iH2) 20.67	(iH3) 30.46	(iH3) 32.74	(iH3) 21.54	
	(iH4) 41.36	(iH4) 30.91	(iH4) 21.32	(D1) 60.51	(D1) 24.54	(D1) 23.03	(D2) 54.31	(D2) 40.40	(D2) 98.95	29.27	16.32	17.20	29.27
N2869	(H1) 21.66	(H1) 11.68	(H1) 13.11	(H2) 21.22	(H2) 11.62	(H2) 13.11	(H3) 21.05	(H3) 12.03	(H3) 12.59	(H4) 21.01	(H4) 12.11	(H4) 13.73	
	(H5) 20.98	(H5) 14.85	(H5) 18.96	(iH1) 26.26	(iH1) 12.28	(iH1) 14.41	(iH2) 20.83	(iH2) 14.46	(iH2) 14.15	(iH3) 18.86	(iH3) 14.86	(iH3) 12.45	
	(iH4) 20.13	(iH4) 20.21	(iH4) 19.07	(D1) 35.46	(D1) 14.20	(D1) 16.69	(D2) 31.13	(D2) 19.03	(D2) 54.14	20.57	**11.46**	13.07	20.57
N2870	(H1) 9.248	(H1) 7.899	(H1) 7.653	(H2) 8.910	(H2) 7.092	(H2) 7.485	(H3) 8.899	(H3) 6.995	(H3) 6.840	(H4) 8.885	(H4) 7.023	**(H4) 6.089**	
	(H5) 8.881	(H5) 7.308	**(H5) 6.404**	(iH1) 9.671	(iH1) 8.940	(iH1) 8.198	(iH2) 7.496	(iH2) 8.595	(iH2) 7.060	(iH3) 7.916	(iH3) 7.485	(iH3) 8.070	
	(iH4) 8.211	(iH4) 10.44	(iH4) 8.199	(D1) 10.65	(D1) 9.247	(D1) 10.59	(D2) 9.682	(D2) 8.063	(D2) 18.02	9.376	7.174	7.721	9.378
N2871	(H1) 16.29	(H1) 9.660	(H1) 10.02	(H2) 16.31	(H2) 10.05	(H2) 10.28	(H3) 16.16	(H3) 10.32	(H3) 10.43	(H4) 16.14	(H4) 12.49	(H4) 12.94	
	(H5) 16.13	(H5) 12.63	(H5) 10.60	(iH1) 22.65	(iH1) 11.25	**(iH1) 9.599**	(iH2) 25.07	(iH2) 11.73	(iH2) 11.02	(iH3) 20.82	(iH3) 13.17	(iH3) 12.18	
	(iH4) 23.14	(iH4) 15.63	(iH4) 13.27	(D1) 31.25	(D1) 13.43	(D1) 12.36	(D2) 48.69	(D2) 20.15	(D2) 68.85	14.79	**9.497**	9.913	14.79
N2872	(H1) 27.49	(H1) 33.61	(H1) 33.63	(H2) 27.17	(H2) 33.58	(H2) 33.29	(H3) 26.95	(H3) 34.90	(H3) 34.80	**(H4) 26.84**	(H4) 36.56	(H4) 35.22	

Cd. tabeli 1

	RW	AR	ΔAR	RW	AR	ΔAR	RW	AR	ΔAR	RW	AR	ΔAR	ES
	(H5) 26.83	(H5) 38.95	(H5) 39.33	(iH1) 31.22	(iH1) 31.72	(iH1) 30.14	(iH2) 33.53	(iH2) 33.90	(iH2) 31.60	(iH3) 36.21	(iH3) 35.65	(iH3) 30.99	
	(iH4) 34.90	(iH4) 48.88	(iH4) 35.47	(D1) 34.69	(D1) 35.40	(D1) 35.96	(D2) 42.59	(D2) 38.59	(D2) 84.45	27.67	35.16	34.79	27.98
N2873	(H1) 13.82	(H1) 12.57	**(H1) 11.95**	(H2) 13.82	(H2) 12.83	(H2) 12.02	(H3) 13.62	(H3) 13.11	(H3) 12.49	(H4) 13.63	(H4) 17.79	(H4) 13.52	
	(H5) 13.63	(H5) 19.92	(H5) 18.42	(iH1) 17.67	(iH1) 13.42	(iH1) 12.34	(iH2) 20.71	(iH2) 13.78	(iH2) 12.13	(iH3) 15.83	(iH3) 14.77	(iH3) 13.25	
	(iH4) 22.75	(iH4) 19.96	**(iH4) 10.89**	(D1) 21.08	(D1) 13.88	(D1) 12.45	(D2) 29.92	(D2) 17.53	(D2) 44.81	13.48	12.46	12.48	13.58
N2874	(H1) 14.31	(H1) 10.63	(H1) 11.39	(H2) 14.23	**(H2) 10.43**	(H2) 11.25	(H3) 13.96	**(H3) 10.18**	(H3) 11.03	(H4) 13.91	(H4) 10.60	(H4) 11.51	
	(H5) 13.90	(H5) 14.49	(H5) 12.64	(iH1) 19.40	(iH1) 12.26	(iH1) 13.37	(iH2) 21.47	(iH2) 12.45	(iH2) 14.46	(iH3) 18.09	(iH3) 12.05	(iH3) 12.72	
	(iH4) 15.17	(iH4) 12.60	(iH4) 10.61	(D1) 27.76	(D1) 13.89	(D1) 15.36	(D2) 42.27	(D2) 22.17	(D2) 47.24	13.23	10.68	11.84	13.23
N2875	(H1) 23.31	(H1) 22.87	(H1) 23.85	(H2) 23.40	(H2) 22.99	(H2) 25.58	(H3) 23.07	(H3) 24.80	(H3) 23.64	(H4) 23.00	(H4) 24.72	(H4) 26.84	
	(H5) 22.99	(H5) 31.03	(H5) 36.08	(iH1) 27.65	(iH1) 22.80	(iH1) 23.12	(iH2) 31.54	(iH2) 22.63	(iH2) 25.07	(iH3) 31.23	(iH3) 30.92	(iH3) 32.70	
	(iH4) 27.02	(iH4) 28.98	(iH4) 26.83	(D1) 35.93	(D1) 24.96	**(D1) 21.26**	(D2) 54.46	(D2) 30.40	(D2) 90.44	**22.33**	24.81	25.70	**22.33**
N2876	**(H1) 0.2579**	(H1) 0.3910	(H1) 0.4298	(H2) 0.2681	(H2) 0.4002	(H2) 0.4381	(H3) 0.2700	(H3) 0.4173	(H3) 0.4705	(H4) 0.2668	(H4) 0.4496	(H4) 0.4684	
	(H5) 0.2645	(H5) 0.8193	(H5) 0.7263	(iH1) 0.3753	(iH1) 0.4717	(iH1) 0.5261	(iH2) 0.5624	(iH2) 0.5739	(iH2) 0.5940	(iH3) 0.7187	(iH3) 0.9584	(iH3) 0.9264	

Cd. tabeli 1

	RW	AR	ΔAR	RW	AR	ΔAR	RW	AR	ΔAR	RW	AR	ΔAR	ES
	(iH4) 0.8184	(iH4) 0.8457	(iH4) 0.8848	(D1) 0.4820	(D1) 0.5512	(D1) 0.6092	(D2) 0.9702	(D2) 0.9011	(D2) 1.998	**0.2425**	0.4131	0.4646	0.4347
N2877	(H1) 0.2227	(H1) 0.2182	(H1) 0.2228	(H2) 0.2184	(H2) 0.2297	(H2) 0.2325	(H3) 0.2166	(H3) 0.2349	(H3) 0.2311	(H4) 0.2167	(H4) 0.3493	(H4) 0.2211	
	(H5) 0.2167	(H5) 0.3042	(H5) 0.3218	(iH1) 0.2392	(iH1) 0.2316	(iH1) 0.2225	(iH2) 0.2100	(iH2) 0.2566	(iH2) 0.2119	**(iH3) 0.1806**	(iH3) 0.2915	(iH3) 0.1980	
	(iH4) 0.2110	(iH4) 0.7351	(iH4) 0.3207	(D1) 0.2347	(D1) 0.2759	(D1) 0.2336	**(D2) 0.1883**	(D2) 0.3473	(D2) 0.2142	0.2348	0.2326	0.2253	0.2033
N2878	(H1) 0.1193	(H1) 0.1148	(H1) 0.1091	(H2) 0.1214	(H2) 0.1088	(H2) 0.1126	(H3) 0.1179	**(H3) 0.1028**	(H3) 0.1141	(H4) 0.1175	(H4) 0.1117	(H4) 0.1284	
	(H5) 0.1170	(H5) 0.2472	(H5) 0.2484	(iH1) 0.1121	(iH1) 0.1137	(iH1) 0.1177	(iH2) 0.1766	(iH2) 0.1160	(iH2) 0.1514	(iH3) 0.1200	(iH3) 0.1105	(iH3) 0.1350	
	(iH4) 0.1302	(iH4) 0.1202	(iH4) 0.1298	(D1) 0.1256	(D1) 0.1037	(D1) 0.1202	(D2) 0.3266	(D2) 0.1548	(D2) 0.2594	0.1281	0.1177	**0.1030**	0.1217
N2879	(H1) 0.4086	(H1) 0.4114	(H1) 0.4870	(H2) 0.4113	(H2) 0.4331	(H2) 0.5061	(H3) 0.3998	(H3) 0.4259	(H3) 0.5106	**(H4) 0.3959**	(H4) 0.4421	(H4) 0.5401	
	(H5) 0.3946	(H5) 0.5616	(H5) 0.6210	(iH1) 0.4825	(iH1) 0.4182	(iH1) 0.4784	(iH2) 0.6169	(iH2) 0.4434	(iH2) 0.5194	(iH3) 0.6196	(iH3) 0.4303	(iH3) 0.4815	
	(iH4) 0.5448	(iH4) 0.4715	(iH4) 0.5604	(D1) 0.5464	(D1) 0.4436	(D1) 0.5311	(D2) 0.8003	(D2) 0.5214	(D2) 1.0135	0.4064	0.4246	0.5029	0.5172

(H1)–(H5) – metoda oparta na falce Haara bez inwersji; (iH1)–(iH4) – metoda oparta na falce Haara z inwersją; (D1)–(D2) – metoda oparta na falce *d*4 z inwersją; liczby w nawiasach oznaczają poziom dekompozycji; RW – prognoza z modelu błądzenia przypadkowego; AR – prognoza z modelu autoregresji; ΔAR – prognoza z modelu autoregresji dla przyrostów; ES – wyrównywanie wykładnicze; ‘>>’ oznacza wartość o co najmniej dwa rzędy wielkości przewyższającą pozostałe wartości błędów; wszystkie wielkości przemnożono przez 0.0001.

LITERATURA

Alrumaih R. M., Al-Fawzan M. A. (2002), Time Series Forecasting Using Wavelet Denoising, *Journal of King Saudi University*, *Engineering Sciences*, 14, 221––234.

Arino M. (1995), Time Series Forecasts via Wavelets: An Application to Car Sales in the Spanish Market, Discussion Paper No. 95–30, Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University.

Augustyniak P. (2003), *Transformacje falkowe w zastosowaniach elektrodiagnostycznych*, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, AGH, Kraków.

Bruzda J. (2011), *Wavelet Analysis in Economic Applications*, monografia w przygotowaniu.

Chen H., Vidacovic B., Mavris D. (2004), Multiscale Forecasting Method using ARMAX Models, Biomedical Engineering Technical Report No. 30/2004, Georgia Institute of Technology.

Conejo A. J., Plazas M. A., Espínola R., Molina A. B. (2005), Day-Ahead Electricity Price Forecasting Using the Wavelet Transform and ARIMA Models, *IEEE Transactions on Power Systems*, 20, 1035–1042.

Ferbar L., Čreslovnik D., Mojškerc B., Rajgelj M. (2009), Demand Forecasting Methods in a Supply Chain: Smoothing and Denoising, *International Journal of Production Economics*, 118, 49–54.

Fernandez V. (2008), Traditional versus Novel Forecasting Techniques: How Much do We Gain?, *Journal of Forecasting*, 27, 637–648.

Fryźlewicz P., Van Bellegem S., von Sachs R. (2003), Forecasting Nonstationary Time Series by Wavelet Process Modelling, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 55, 737–764.

Kaboudan M. (2005), Extended Daily Exchange Rates Forecasts Using Wavelet Temporal Resolution, *New Mathematics and Natural Computation*, 1, 79–107.

Makridakis S., Hibon M. (2000), The M3-Competition: Results, Conclusions and Implications, *International Journal of Forecasting*, 16, 451–476.

Minu K. K., Lineesh M. C., Jessy John C. (2010), Wavelet Neural Networks for Nonlinear Time Series Analysis, *Applied Mathematical Sciences*, 4, 2485–2495.

Nason G. P. (2008), *Wavelet Methods in Statistics with R*, Springer-Business Media, New York.

Percival D. B., Walden A. T. (2000), *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

Renaud O., Starck J.-L., Murtagh F. (2002), Wavelet-based Forecasting of Short and Long Memory Time Series, Working Paper No. 2002.04, University of Geneva.

Schlüter S., Deuschle C. (2010), Using Wavelets for Time Series Forecasting – Does it Pay Off?, Diskussionspapier No. 4/2010, Institut für Wirtschaftspolitik und Quantitative Wirtschaftsforschung, Friedrich-Alexander-Universität.

Wong H., Ip W.-C., Xie Z., Lui X. (2003), Modelling and Forecasting by Wavelets, and the Application to Exchange Rates, *Journal of Applied Statistics*, 30, 537v553.

FORECASTING VIA WAVELET SMOOTHING

A b s t r a c t. In the paper we discuss existing techniques for univariate time series forecasting based on the wavelet transform and introduce also a new method of forecasting with wavelets. The new approach is based on a nonparametric estimation of a stochastic signal via a wavelet smoothing. The method can be thought of as a wavelet variant of the exponential smoothing, which is, however, much more universal, being at the same time relatively computationally efficient. Our empirical verification based on 17 time series from the *M3-JIF-Competition* database provides very promising results, confirming the practical relevance of the suggested approach.

K e y w o r d s: wavelet forecasting, nonparametric signal estimation, wavelet smoothing.