A C T A   U N I V E R S I T A T I S   N I C O L A I   C O P E R N I C I
EKONOMIA XLIII nr 2 (2012) 211–220

Pierwsza wersja złożona 25 października 2011
Końcowa wersja zaakceptowana 3 grudnia 2012

ISSN
2080-0339

*Sławomir Mentzen**

WYCENA EUROPEJSKICH I AMERYKAŃSKICH OPCJI ZA POMOCĄ PROCESÓW DECYZYJNYCH MARKOWA

Z a r y s   t r e ś c i. W pracy opisano teoretyczne podstawy procesów decyzyjnych Markowa (MDP), przedstawiono algorytmy wyceny europejskich opcji kupna i sprzedaży oraz amerykańskich opcji kupna wykorzystujące MDP. Wyniki porównano z wycenami uzyskanymi metodą Blacka–Scholesa.

S ł o w a   k l u c z o w e: procesy decyzyjne Markowa, wycena opcji, opcje europejskie, opcje amerykańskie, optymalne decyzje.

Klasyfikacja J E L: C61, G13.

WSTĘP

Wycena opcji na instrumenty finansowe jest bardzo istotnym zagadnieniem we współczesnym świecie. Wiele podmiotów obecnych na rynkach finansowych stosuje zaawansowane metody wyceny by wykryć niedoszacowane lub przeszacowane opcje i zyskać na ich kupnie bądź sprzedaży. Dokładna wycena jest też ważna gdy wystawia się opcję poza rynkiem regulowanym i nie ma porównania do cen rynkowych.

W pierwszej części pracy przedstawiono teoretyczne podstawy procesów decyzyjnych Markowa (MDP – Markov Decision Processes). Następnie opisano model rynku finansowego który posłużył do skonstruowania użytego algorytmu wyceny opcji. Następnie dokonano wyceny europejskich opcji kupna i sprzedaży oraz amerykańskich opcji kupna. Wyniki porównano wyniki z rezultatami uzyskanymi metodą Blacka–Scholesa.

* Adres do korespodencji: Sławomir Mentzen, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania UMK w Toruniu, ul. Gagarina 13a, 81–700 Toruń, e-mail: smentzen@doktorant.umk.pl.

1. TEORETYCZNE PODSTAWY MDP

Definicja 1.

Na model MDP składa się:

1. Dyskretny i przeliczalny zbiór stanów procesu S.
2. Dyskretny zbiór możliwych do podjęcia decyzji (akcji) w stanie $s \in S$.
3. Nieskończony, dyskretny zbiór etapów podejmowania decyzji T.
4. Zbiór skończonych wypłat przyznawanych natychmiast po podjęciu decyzji $r(s,a)$, $s \in S$, $a \in A_s$.
5. Warunkowe prawdopodobieństwa przejścia do kolejnego stanu $p(\cdot | s,a)$, $s \in S$, $a \in A_s$.

Innymi słowy, przebieg procesu wygląda następująco. Na każdym etapie decyzyjnym proces znajduje się w jakimś stanie. Do każdego stanu przypisany jest zbiór możliwych do podjęcia akcji, zbiór wypłat za wybranie poszczególnych akcji i zbiór prawdopodobieństw przejścia do innego stanu po podjęciu odpowiedniej decyzji. W momencie podjęcia decyzji przyznawana jest natychmiastowa wypłata, zależna jedynie od stanu w którym znajduje się proces, etapu decyzyjnego i podjętej decyzji, następnie proces zgodnie z określonym prawdopodobieństwem przechodzi do innego stanu, gdzie na kolejnym etapie decyzyjnym znowu podejmowana jest akcja.

Celem rozpatrywania danego modelu MDP jest znalezienie takich reguł podejmowania decyzji, które będą maksymalizować wartość otrzymywanych nagród w czasie trwania procesu. Regułę podejmowania decyzji nazywamy markowowską, jeśli w każdym stanie i na każdym etapie decyzyjnym, decyzja jest podejmowana jedynie w oparciu o wybraną akcję i stan w którym znajduje się proces. Nie ma znaczenia historia procesu, jedynie jego aktualna sytuacja.

Definicja 2.

Polityką, planem lub strategią nazywamy zestaw reguł decyzyjnych określających podejmowane akcje w każdym momencie decyzyjnym. Politykę oznaczamy w sposób następujący: $\pi = (d_1, d_2, ..., d_{N-1})$, gdzie d_t jest zbiorem decyzji podejmowanych dla każdego stanu s na etapie decyzyjnym t dla $t = 1,2,...,N-1$, $N \leq \infty$. Politykę nazywamy stacjonarną, jeśli $d_t = d$ dla każdego $t \in T$, gdzie $d_t \in D_t^{MD}$ jest ustaloną regułą (Hu, Yue, 2008, s.2).

Od tego momentu przyjmujemy następujące założenia upraszczające model i jego notację:

1. Stacjonarność funkcji wypłat i prawdopodobieństw przejścia. Zarówno wypłaty $r(s,a)$, jak i prawdopodobieństwa przejścia $p(j | s,a)$ nie zmieniają się przy przechodzeniu z jednego etapu decyzyjnego do kolejnego.
2. Otrzymywane wypłaty są ograniczone, $|r(s,a)| < \infty$ dla każdego $a \in A_s$ i $s \in S$.
3. Stacjonarność polityki, $d_t = d$ dla każdego $t \in T$.

Niech $v^{\pi}(s)$ oznacza wartość oczekiwaną wszystkich nagród procesu, przy założeniu nieskończonego horyzontu czasowego, użycia polityki π oraz rozpoczęcia procesu od stanu s.

$$v^{\pi}(s) = E_s^{\pi}\left\{\sum_{t=1}^{\infty} r(s_t, a_t)\right\}.$$

Ponieważ tak zdefiniowana wartość oczekiwana nie uwzględnia czynnika czasu, na ogół prowadzić będzie do wartości nieskończonych. Dlatego w dalszej części pracy stosowany będzie zdyskontowany MDP. Jest on znacznie bliższy rzeczywistości. Odpowiada za to zarówno inflacja, jak i preferencja czasowa, sprawiająca, że wyżej ceni się teraźniejszy zysk od tego w przyszłości.

Definicja 3.

Wartością oczekiwaną procesu zdyskontowanego jest (Kadota i inni, 2006):

$$v_{\lambda}^{\pi}(s) \equiv E_s^{\pi}\left\{\sum_{t=1}^{\infty} \lambda^{t-1} r(s_t, a_t)\right\}$$

dla $0 \le \lambda < 1$.

Definicja 5.

Polityką optymalną nazywamy politykę $v_{\lambda}^{*} \equiv \sup_{\pi} v_{\lambda}^{*}$.

Przy dotychczasowych założeniach wartość optymalnej polityki v_{λ}^{*} można wyznaczyć, korzystając z równań Bellmana:

$$v_{\lambda}(s) = \sup_{a \in A_s}\left\{ r(s,a) + \sum_{j \in S} \lambda p(j \mid s,a) v_{\lambda}(j)\right\}$$

dla $s \in S$ (Puterman, 2005, s. 147).

2. WYCENA OPCJI AMERYKAŃSKIEJ

Opcja amerykańska jest obecnie raczej rzadko spotykanym rodzajem opcji. Właściciel opcji ma prawo do zakupu (w przypadku opcji kupna) lub sprzedaży (dla opcji sprzedaży) w dowolnym dniu w trakcie ważności opcji ustalonej ilości instrumentu finansowego po określonej cenie, nazywanej ceną wykonania. Parametrami koniecznymi do dokonania wyceny są: zmienność instrumentu σ, wolna od ryzyka stopa procentowa r, cena wykonania K, obecna cena instrumentu finansowego S_0 oraz czas pozostały do wykonania opcji T.

W pracy przyjęto założenia z modelu dwumianowego. W czasie δt cena instrumentu może wzrosnąć $e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$ razy lub spaść $e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$. Stąd cena instrumentu w momencie $t + \delta t$ wynosi:

$$S_{t+\delta t} = \begin{cases} uS_t = S_t e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \\ dS_t = S_t e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} \end{cases},$$

z prawdopodobieństwem arbitrażowym, odpowiednio q i $1-q$ (Weron, 2005, s. 161). Prawdopodobieństwo arbitrażowe wyznacza wzór:

$$q = \frac{e^{r\delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}.$$

Zastosowanie miary arbitrażowej sprawia, że podczas pracy algorytmu ciąg kolejnych wartości $v^n(s)$ tworzy martyngał, czyli taki proces, którego wartość oczekiwana w przyszłości jest równa jego obecnej wartości (Weron, 2005, s. 151).

Proces jest dyskontowany parametrem λ który wynosi $\lambda = e^{\frac{r}{T}}$. Ponieważ opcja może być wykonana w każdej chwili do momentu jej wygaśnięcia, właściciel ma w każdym stanie dostępne dwie akcje. Pierwsza a_o oznacza niewykonanie opcji, dla każdego s nagroda $r(a_0, s) = 0$. Drugą dostępną akcją jest a_1 oznaczająca wykonanie opcji. Wybranie akcji a_1 powoduje otrzymanie wypłaty w wysokości $r(a_1, s) = \max(0; s-K)$ w przypadku opcji kupna oraz $r(a_1, s) = \max(0; K-s)$ dla opcji sprzedaży.

Wartość opcji kupna można obliczyć korzystając z poniższego algorytmu (Bauerle, Rieder, 2011, s. 333):

1. Należy ustalić $n = 0$ i dla każdego $s \in \{S_0 d^k u^{N-k} \mid 0 \le k \le N\}$ obliczyć $v^0(s) = \max(0; s-K)$.
2. Zwiększyć n o 1 i dla każdego $s \in \{S_0 d^k u^{N-n-k} \mid 0 \le k \le N-n\}$ $v_\lambda^n(s) = \max_s \left\{0; s-K; \lambda(qv_\lambda^{n-1}(us) + (1-q)v_\lambda^{n-1}(ds)\right\}$.
3. Jeśli $n = N$ algorytm kończy działanie a wartością opcji jest $v_\lambda^N(s)$, w przeciwnym wypadku należy wrócić do punktu 2.

Aby wycenić opcję sprzedaży, wystarczy zamienić $s-K$ na $K-s$.

$N = \dfrac{T}{\delta t}$ jest zarówno ilością stanów, jak i ilości etapów decyzyjnych procesu, dlatego wyznacza odstęp czasu pomiędzy kolejnymi decyzjami o wykonaniu bądź niewykonaniu opcji.

Opisany wyżej algorytm wymaga komentarza, ponieważ jest nietypowy dla procesów decyzyjnych Markowa. Z reguły stosuje się MDP do znajdowania optymalnych decyzji dla poszczególnych stanów. W tej pracy nie jest istotne, jakie decyzje należy podjąć, czyli przy jakiej cenie instrumentu należy zrealizować opcję a przy jakiej nie powinno się tego robić. Istotny jest sam fakt, że podejmowane decyzje są optymalne. Dzięki temu ostatnia wartość oczekiwana procesu $v_{\lambda}^{N}(s)$ musi być prawidłową wyceną opcji.

Za pomocą opisanego wyżej algorytmu wyceniono amerykańskie opcje kupna o następujących parametrach: $K = 100$, $r = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}2$, $T = 1$ rok. Parametry mają wartości umowne, jednak ich wartość jest zbliżona do realnych wartości spotykanych na giełdach. Pierwszym etapem pracy było wyznaczenie prawdopodobieństwa arbitrażowego q Dla wszystkich omawianych w pracy przypadków uzyskano w przybliżeniu $q = 0{,}532$. Następnie porównano wycenę z wyceną uzyskaną za pomocą metody Blacka–Scholesa.

Cenę amerykańskiej i europejskiej opcji kupna w modelu Blacka–Scholesa wyznacza się z następującego wzoru:

$$P = S_0 N(d1) - K\exp(-rT)N(d2),$$

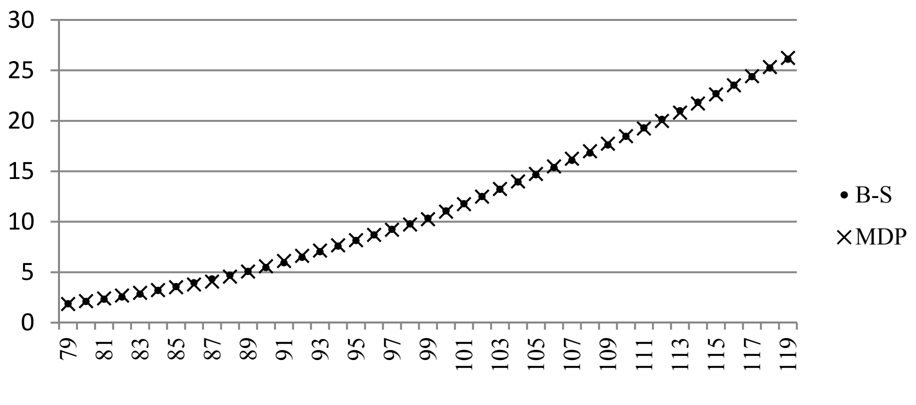
gdzie:

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{K}\right) + rT}{\sqrt{\sigma T}} + 0{,}5\sigma\sqrt{T}\ ,$$

$$d2 = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{K}\right) + rT}{\sqrt{\sigma T}} - 0{,}5\sigma\sqrt{T}\ .$$

N jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

Na wykresach oraz w tabelach poniżej znajduje się porównanie obydwu wycen dla wartości początkowych instrumentu finansowego wynoszących od 80 do 120 jednostek.



Wykres 1. Cena amerykańskiej opcji kupna

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1. Wyceny amerykańskiej opcji kupna o cenie wykonania 100 dla ceny początkowej S

S	B-S	MDP	Błąd	S	B-S	MDP	Błąd
80	1,88	1,85	-1,71%	100	10,35	10,25	-0,99%
81	2,10	2,12	1,11%	101	11,07	10,99	-0,65%
82	2,32	2,40	3,39%	102	11,78	11,74	-0,34%
83	2,54	2,68	5,28%	103	12,50	12,49	-0,07%
84	2,82	2,95	4,64%	104	13,22	13,24	0,17%
85	3,20	3,23	0,99%	105	13,94	13,99	0,38%
86	3,58	3,51	-1,88%	106	14,66	14,74	0,57%
87	3,95	3,79	-4,21%	107	15,37	15,49	0,75%
88	4,33	4,06	-6,14%	108	16,09	16,24	0,91%
89	4,70	4,55	-3,24%	109	16,81	16,99	1,06%
90	5,08	5,07	-0,21%	110	17,61	17,74	0,71%
91	5,46	5,59	2,40%	111	18,46	18,49	0,15%
92	5,93	6,10	2,94%	112	19,30	19,23	-0,36%
93	6,48	6,62	2,16%	113	20,15	19,98	-0,83%
94	7,03	7,14	1,49%	114	21,00	20,81	-0,88%
95	7,59	7,66	0,93%	115	21,84	21,72	-0,59%
96	8,14	8,17	0,44%	116	22,69	22,62	-0,32%
97	8,69	8,69	0,01%	117	23,54	23,52	-0,06%
98	9,24	9,21	-0,36%	118	24,39	24,43	0,17%
99	9,80	9,73	-0,69%	119	25,23	25,33	0,39%
				120	26,11	26,24	0,47%

Źródło: obliczenia własne.

W większości wypadków obie wyceny dzieli różnica poniżej jednego procenta. Dla pojedynczych wartości cen początkowych potrafi ona jednak wzrosnąć do nawet sześciu procent. Średnia wartość bezwzględnych różnic w cenie wynosi 1,3%. Oznacza to, że przeważnie wycena uzyskana za pomocą MDP jest zbliżona do ceny wynikającej z metody Blacka–Scholesa.

3. WYCENA OPCJI EUROPEJSKIEJ

Opcja europejska jest zdecydowanie najczęściej spotykanym rodzajem opcji. Wycena opcji europejskiej za pomocą MDP wymaga użycia szczególnego przypadku procesów decyzyjnych Markowa, takiego, w którym nie podejmowane są żadne decyzje. Wynika to z faktu, że opcję europejską można wykonać tylko w dniu jej wygaśnięcia. Dlatego na wszystkich etapach procesu dostępna jest tylko akcja a_o oznaczająca niewykonanie opcji, podczas ostatniego etapu dostępna będzie również jedna akcja – a_1 – oznaczająca wykonanie opcji. Wybranie akcji a_1 powoduje przyznanie wypłaty w wysokości

$r(a_1, s) = \max(0; s - K)$ w przypadku opcji kupna oraz $r(a_1, s) = \max(0; K - s)$ dla opcji sprzedaży.

Wartość opcji kupna można obliczyć, korzystając z opisanego wyżej algorytmu, zmodyfikowanego o usunięcie możliwości przedterminowego wykonania opcji:

1. Należy ustalić $n = 0$ i dla każdego $s \in \{S_0 d^k u^{N-k} \mid 0 \le k \le N\}$ obliczyć $v^0(s) = \max(0; s - K)$
2. Zwiększyć n o 1 i dla każdego $s \in \{S_0 d^k u^{N-n-k} \mid 0 \le k \le N - n\}$ $v_\lambda^n(s) = \max_s \{0; \lambda(q v_\lambda^{n-1}(us) + (1-q) v_\lambda^{n-1}(ds)\}$.
3. Jeśli $n = N$ algorytm kończy działanie a wartością opcji jest $v_\lambda^N(s)$, w przeciwnym wypadku należy wrócić do punktu 2.

Aby otrzymać wycenę opcji sprzedaży trzeba zamienić $s - K$ na $K - s$.

Wzór na cenę europejskiej opcji kupna w modelu Blacka–Scholesa podano wyżej, cenę europejskiej opcji sprzedaży można wyznaczyć z następującego wzoru:

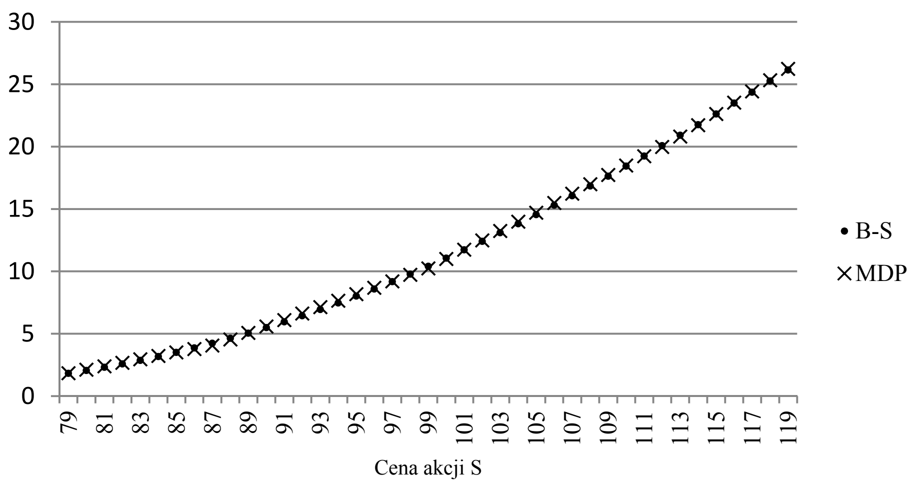
$$P = -S_0 N(-d1) + K \exp(-rT) N(-d2),$$

gdzie:

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{K}\right) + rT}{\sqrt{\sigma T}} + 0{,}5\sigma\sqrt{T},$$

$$d2 = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{K}\right) + rT}{\sqrt{\sigma T}} - 0{,}5\sigma\sqrt{T}.$$

Wyceniono europejskie opcje kupna i sprzedaży o identycznych jak poprzednio parametrach: $K = 100$, $r = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}2$, $T = 1$ rok. Wyniki również porównano z wynikami uzyskanymi za pomocą standardowej metody Blacka–Scholesa.



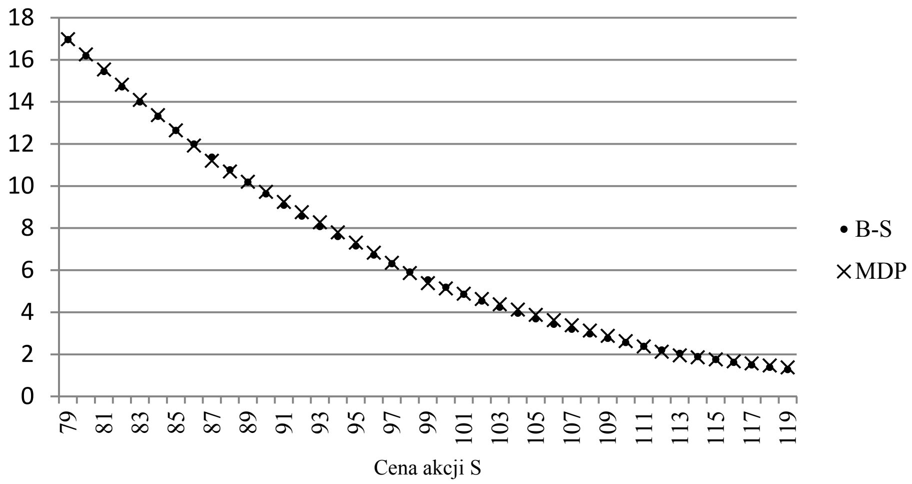
Wykres 2. Cena europejskiej opcji kupna

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Wyceny europejskiej opcji kupna o cenie wykonania 100 dla ceny początkowej S

S	B-S	MDP	Błąd	S	B-S	MDP	Błąd
80	1,83	1,85	0,68%	100	10,41	10,25	-1,62%
81	2,06	2,12	2,88%	101	11,06	10,99	-0,59%
82	2,31	2,40	3,77%	102	11,73	11,74	0,16%
83	2,58	2,68	3,68%	103	12,41	12,49	0,68%
84	2,87	2,95	2,88%	104	13,11	13,24	1,02%
85	3,18	3,23	1,55%	105	13,82	13,99	1,21%
86	3,51	3,51	-0,14%	106	14,56	14,70	1,00%
87	3,87	3,79	-2,09%	107	15,30	15,49	1,21%
88	4,24	4,06	-4,21%	108	16,07	16,24	1,07%
89	4,64	4,55	-1,85%	109	16,84	16,99	0,86%
90	5,06	5,07	0,27%	110	17,63	17,74	0,59%
91	5,50	5,59	1,66%	111	18,44	18,49	0,27%
92	5,96	6,10	2,47%	112	19,25	19,23	-0,09%
93	6,44	6,62	2,81%	113	20,08	19,98	-0,47%
94	6,95	7,14	2,78%	114	20,92	20,81	-0,50%
95	7,47	7,66	2,46%	115	21,77	21,72	-0,23%
96	8,02	8,17	1,92%	116	22,62	22,62	-0,02%
97	8,59	8,69	1,20%	117	23,49	23,52	0,13%
98	9,18	9,21	0,35%	118	24,37	24,43	0,24%
99	9,79	9,73	-0,59%	119	25,26	25,33	0,30%
				120	26,15	26,24	0,33%

Źródło: obliczenia własne.



Wykres 3. Cena europejskiej opcji sprzedaży

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Wyceny europejskiej opcji sprzedaży o cenie wykonania 100 dla ceny początkowej S

S	B-S	MDP	Błąd	S	B-S	MDP	Błąd
80	16,9572	16,97959	0,13%	100	5,536713	5,380909	-2,81%
81	16,18714	16,25667	0,43%	101	5,183277	5,130113	-1,03%
82	15,43634	15,53375	0,63%	102	4,84815	4,879352	0,64%
83	14,70539	14,81083	0,72%	103	4,530774	4,628591	2,16%
84	13,99479	14,08791	0,67%	104	4,230573	4,37783	3,48%
85	13,30498	13,36498	0,45%	105	3,946953	4,127069	4,56%
86	12,63634	12,64206	0,05%	106	3,679311	3,876308	5,35%
87	11,98916	11,91914	-0,58%	107	3,427036	3,625547	5,79%
88	11,36366	11,19622	-1,47%	108	3,189512	3,374786	5,81%
89	10,76	10,68549	-0,69%	109	2,966123	3,124025	5,32%
90	10,17825	10,20326	0,25%	110	2,756254	2,873264	4,25%
91	9,618417	9,721023	1,07%	111	2,559296	2,622503	2,47%
92	9,080448	9,238788	1,74%	112	2,374645	2,371742	-0,12%
93	8,564216	8,756553	2,25%	113	2,201709	2,120981	-3,67%
94	8,069534	8,274319	2,54%	114	2,039904	1,94998	-4,41%
95	7,596158	7,792084	2,58%	115	1,888663	1,853812	-1,85%
96	7,143788	7,309849	2,32%	116	1,747429	1,757644	0,58%
97	6,712075	6,827614	1,72%	117	1,615663	1,661475	2,84%
98	6,300622	6,345379	0,71%	118	1,492843	1,565307	4,85%
99	5,908992	5,863144	-0,78%	119	1,378463	1,469139	6,58%
				120	1,272037	1,37297	7,93%

Źródło: obliczenia własne.

W przypadku europejskich opcji kupna podobnie jak przy opcjach amerykańskich średni błąd wynosi 1,3%. Dla europejskich opcji sprzedaży jest on większy i równa się 2,4%. W obu przypadkach występują pojedyncze duże różnice rzędu 5%, a w przypadku opcji sprzedaży błąd dochodzi do prawie 8 %.

PODSUMOWANIE

W pracy pokazano jak można wycenić najczęściej spotykane opcje za pomocą procesów decyzyjnych Markowa. Otrzymane wyniki są przeważnie zbliżone do tych uzyskanych metodą Blacka–Scholesa, występują jednak przypadki sporych różnic w wycenie. Warto kontynuować badania nad wyceną opcji za pomocą MDP. Kolejnym krokiem badania powinno być też porównanie wyceny uzyskanej przez MDP z wyceną Blacka–Scholesa oraz z rzeczywistymi cenami uzyskanymi na giełdzie.

LITERATURA

Bauerle N., Rieder U. (2011), *Markov Decision Processes with Applications to Finance*, Springer, Heidelberg.

Baz J., Chacko G. (2008), *Financial Derivatives: Pricing, Applications, and Mathematics*, Cambridge University Press.

Ching W., Ng M. (2006), *Markov Chains: Models, Algorithms and Applications*, Springer, New York.

Decewicz A. (2011), *Probabilistyczne modele badań operacyjnych*, Oficyna Wydawnicza SGH w Warszawie, Warszawa.

Hu Q., Yue W. (2008), *Markov Decision Processes with Their Applications*, Springer, New York.

Kadota Y., Kurano M. Yasuda M. (2006), *Discounted Markov Decision Processes*, „An International Journal Computers & Mathematics With Applications", 51, 279–284.

London J. (2006), *Modeling Derivatives Applications*, Financial Time Press, New Jersey.

Puterman M. (2005), *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic, Dynamic Programming*, John Wiley and Sons, New Jersey.

Rudnicki R. (2001), *Wykłady z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Weron A., Weron R. (2005), *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

PRICING OF AMERICAN AND EUROPEAN OPTIONS USING THE MARKOV DECISION PROCESSES

A b s t r a c t. The paper describes the theoretical foundations of Markov decision processes (MDP), presents the pricing algorithms for European and American call and put options using the MDP. Results were compared with results obtained using the Black-Scholes model.

K e y w o r d s: Markov decision processes, European options, American options, option pricing, optimal decisions.